

Rozprawa doktorska

# Badanie gwiazd klasycznego pasa niestabilności metodami asterosejsmologii

Henryka Netzel

Promotor  
dr hab. Radosław Smolec

Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika PAN

Warszawa 2021



*Serdecznie dziękuję mojemu promotorowi, Radosławowi Smolcowi, za przekazanie fascynacji gwiazdami pulsującymi. Dziękuję za przekazaną wiedzę i nieocenione wsparcie od początku naszej współpracy oraz za wszystkie inspirujące dyskusje.*

*Dziękuję także moim współpracownikom za poświęcony mi czas, dzięki któremu mogłam się rozwijać jako naukowiec: Wojciechowi Dziembowskiemu, Pawłowi Moskalikowi, Aloszy Pamyatnykh, Pawłowi Pietrukowiczowi i Katrien Kolenberg.*

*Dziękuję Krystianowi Iłkiewiczowi za wiarę w moje możliwości.*

*Dziękuję również mojej Rodzinie za wsparcie na całej mojej drodze edukacji.*

*Praca naukowa finansowana ze środków budżetowych na naukę w latach 2016 – 2021 w ramach projektu "Diamentowy Grant" nr 0192/DIA/2016/45, a także w ramach programu START Fundacji na rzecz Nauki Polskiej.*



# Abstract

RR Lyrae stars and classical Cepheids are pulsating stars located in the classical instability strip in the Hertzsprung-Russel diagram. They are essential astrophysical tools for studying distances, Galactic structure, and stellar populations. With only a few exceptions, these stars were not studied extensively with asteroseismic methods, because their pulsations are typically in one or two modes. Discoveries from recent years showed that additional non-radial modes might be detected in these stars, giving a chance to use asteroseismic techniques on these objects.

$\delta$  Scuti stars are pulsating stars located at the intersection of the classical instability strip with the main sequence. They are a diverse group of pulsators with different masses, populations, and at different evolutionary stages. The majority of  $\delta$  Scuti stars are low-amplitude multi-mode non-radial pulsators, which makes them difficult targets for asteroseismic studies since the mode identification is not straightforward. However, two subgroups of High-Amplitude Delta Scuti stars (HADS) and SX Phoenicis stars have pulsation characteristics similar to RR Lyrae stars and Cepheids, with dominant radial pulsations. Multi-mode radially pulsating HADS and SX Phe stars allows for mode identification through period ratios and application of asteroseismic methods to study these stars.

The main goal of this thesis is to study for the first time classical pulsators and HADS with asteroseismic methods on a large number of objects. This study consists of an observational part in which I studied the photometric time series, with the goal of finding suitable candidates for asteroseismic modeling, and a theoretical part, which involves asteroseismic modeling of the multi-mode stars I have found.

In the first part of the thesis, I focused on detecting and analyzing the additional non-radial modes present in RR Lyrae stars. The most characteristic additional signal in these stars is the so-called 0.61-mode, forming a period ratio with the first-overtone of approx. 0.60 – 0.65. The largest census of RR Lyrae stars with the additional signal up to date is presented in Sec. 2 of the thesis. This analysis resulted in the discovery of 95 per cent of currently known RR Lyrae stars with this signal. With almost a thousand such stars detected, I could present the statistically significant analysis of the pulsation characteristics and test the current hypothesis explaining the origin of this signal. Additionally, I present a discovery of other additional signals in RR Lyrae stars, that are currently not understood.

The current model explaining this additional signal involves excitation of non-radial modes of moderate degrees (8 and 9 in RR Lyrae stars or 7, 8, and 9 in classical Cepheids). If these non-radial modes could be detected in spectroscopic data, then spectroscopic mode identification techniques could be used for a direct confirmation of the proposed model. In the Sec. 3 of the thesis, I performed a feasibility study on whether those non-radial modes of moderate degrees can be detected in spectroscopic data for classical Cepheids.

In Sec. 4 asteroseismic methods were used to determine the physical parameters of RR Lyrae stars with additional non-radial modes, assuming that the model identifying these periodicities as modes of degrees 8 and 9 is correct. Based on the census of RR Lyrae stars with these

modes, I used selected triple-mode RR Lyrae stars with non-radial modes, and by theoretical modeling, I inferred their physical parameters. In particular, the mass estimation is essential, since currently there is no confirmed RR Lyrae star in an eclipsing binary system, which makes asteroseismology the only reliable method to measure their masses. The results presented here are important for our understanding of classical pulsators since they were rarely a target of asteroseismic modeling.

The final result presented in the thesis is based on the observational and theoretical investigation of HADS. The observational result, presented in Sec. 5, was based on a sample of  $\delta$  Scuti stars available in the literature. Using this sample I found candidates for HADS pulsating simultaneously in multiple radial modes. My candidates form the largest such sample known so far. In Sec. 6 I investigated this sample of HADS theoretically to infer their physical parameters. Such analysis resulted in the largest sample of HADS with determined physical parameters and allowed for the selection of candidates for SX Phoenicis stars.

# Streszczenie

Rozprawa doktorska zatytułowana "Badanie gwiazd klasycznego pasa niestabilności metodami asterosejsmologii" jest poświęcona badaniu gwiazd RR Lutni, Cefeid klasycznych oraz gwiazd typu  $\delta$  Scuti pulsujących w modach radialnych.

Gwiazdy RR Lutni i Cefeidy klasyczne to klasyczne gwiazdy pulsujące. Są ważnym narzędziem w astrofizyce ze względu na możliwość wyznaczania odległości z ich pomocą. Do tej pory jednak, poza pojedynczymi wyjątkami, nie były interesującymi obiektami do badania ich z wykorzystaniem metod asterosejsmologii. Ich pulsacje są typowo radialne, jedno bądź dwumodalne, przez co w zasadzie nie ma ograniczeń na parametry fizyczne podczas modelowania. Ostatnie odkrycia dodatkowych modów nieradialnych w gwiazdach RR Lutni i Cefeidach pozwalają po raz pierwszy na szerokie zbadanie tych gwiazd metodami asterosejsmologii.

Gwiazdy  $\delta$  Scuti to bardzo różnorodna grupa gwiazd zlokalizowana na diagramie Hertzsprunga-Russela na przecięciu klasycznego pasa niestabilności z ciągiem głównym. Należą do niej gwiazdy na różnych etapach ewolucji, a także o zakresie mas odpowiadającym zmianie struktury wewnętrznej gwiazdy (pojawienie się konwektywnego jądra). Gwiazdy  $\delta$  Scuti typowo pulsują w licznych modach nieradialnych o niskich amplitudach, a identyfikacja modów, konieczna do modelowania asterosejsmicznego, nie jest prosta. Gwiazdy  $\delta$  Scuti pulsujące w kilku modach radialnych (gwiazdy HADS oraz SX Phoenicis) pozwalają na identyfikację modów na podstawie stosunków okresów. Dzięki temu takie gwiazdy mogą zostać wykorzystane do badania asterosejsmicznego.

Głównym celem rozprawy jest zbadanie gwiazd RR Lutni, Cefeid oraz  $\delta$  Scuti z wykorzystaniem metod asterosejsmologii. Gwiazdy te zostały zbadane zarówno od strony obserwacyjnej jak i teoretycznej. W obserwacyjnej części przeprowadzone było poszukiwanie odpowiednich obiektów do modelowania. W części teoretycznej przeprowadzono modelowanie asterosejsmiczne wyselekcjonowanych wcześniej gwiazd.

Pierwsza część rozprawy jest poświęcona gwiazdom typu RR Lutni oraz Cefeidom klasycznym, które wykazują pulsacje w dodatkowych modach nieradialnych. W rozdziale 2 zaprezentowane są wyniki poszukiwania gwiazd RR Lutni z dodatkowymi sygnałami, tworzącymi charakterystyczny stosunek okresów z okresem pierwszego owertonu, w zakresie 0.60 – 0.65, na podstawie analizy fotometrii z projektu OGLE dla pól zgrubienia centralnego Galaktyki. Analiza ta pozwoliła na sklasyfikowanie niemal 1000 gwiazd RR Lutni z modami nieradialnymi, co odpowiada 95% znanych obecnie gwiazd tego typu. W rozdziale 2 przedstawiona jest charakterystyka grupy oraz dyskusja obserwowanych cech tych gwiazd w kontekście zaproponowanego wyjaśnienia natury dodatkowych sygnałów jako modów nieradialnych o stopniach 8 i 9. Otrzymane wyniki potwierdziły przewidywania zaproponowanego modelu co stanowi silny argument za jego poprawnością.

W rozdziale 3 przedstawione są wyniki badania przydatności obserwacji spektroskopowych do analizy modów nieradialnych w Cefeidach klasycznych. Celem tego rozdziału jest odpowiedzenie na pytanie, czy jest możliwość detekcji, w obserwacjach spektroskopowych, zmienności związanej z dodatkowymi modami nieradialnymi w Cefeidach klasycznych. Przeanalizowałam

serie syntetycznych profili linii widmowych. Na tej podstawie przedyskutowałam warunki, jakie muszą spełniać obserwacje spektroskopowe, aby zwiększyć szansę na detekcję modów nieradialnych o relatywnie wysokich stopniach.

Rozdział 4 poświęcony jest modelowaniu asterosejsmicznemu gwiazd RR Lutni z dodatkowymi modami nieradialnymi, przy założeniu, że model identyfikujący je jako mody o stopniach 8 i 9 jest poprawny. W analizie uwzględniono gwiazdy trójmodalne wyselekcjonowane głównie podczas analizy w rozdziale 2. Wykorzystując otoczkowy kod pulsacyjny oszacowano parametry fizyczne badanych gwiazd RR Lutni. Wykorzystanie gwiazd RR Lutni w modelowaniu asterosejsmicznym jest innowacyjne i jest to pierwsze takie modelowanie w literaturze, które jest jednocześnie kolejnym testem teorii dotyczącej natury obserwowanych sygnałów. Na podstawie modelowania otrzymałam oszacowania parametrów fizycznych gwiazd RR Lutni. Oszacowania mas są szczególnie istotne, ponieważ do tej pory nie jest znana gwiazda RR Lutni w zaćmieniowym układzie podwójnym, umożliwiającą bezpośrednie obserwacyjne wyznaczenie masy.

Druga część rozprawy jest poświęcona badaniu gwiazd typu  $\delta$  Scuti pulsujących w modach radialnych. Rozdział 5 zawiera wyniki analizy obserwacji fotometrycznych gwiazd  $\delta$  Scuti obserwowanych przez projekt OGLE w polach zgrubienia centralnego Galaktyki. Jest to największa znana próbka gwiazd  $\delta$  Scuti. Celem analizy była selekcja gwiazd  $\delta$  Scuti pulsujących w co najmniej trzech modach radialnych jednocześnie. Wyselekcjonowane gwiazdy zostały zbadane na gruncie teoretycznym w rozdziale 6. Celem analizy przedstawionej w rozdziale 6 było oszacowanie parametrów fizycznych dużej liczby wielomodalnych radialnych gwiazd  $\delta$  Scuti na podstawie modelowania asterosejsmicznego. Pozwoliło to na analizę rozkładów parametrów w populacji, które zostały porównane z wynikami z literatury.





# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wstęp</b>	<b>1</b>
1.1	Pulsacje gwiazd	1
1.1.1	Pulsacje radialne i nieradialne	1
1.1.2	Pulsacje wielomodalne	2
1.1.3	Mody ciśnieniowe i grawitacyjne	3
1.1.4	Mechanizm wzbudzania pulsacji i selekcji modów	5
1.1.5	Pulsacje na diagramie Hertzsprunga-Russela	8
1.1.6	Krzywe blasku gwiazd pulsujących	8
1.2	Asterosejsmologia	12
1.3	Gwiazdy RR Lutni oraz Cefeidy klasyczne	13
1.3.1	Pulsacje wielomodalne i dodatkowe mody w gwiazdach RR Lutni i Cefeidach	17
1.4	Gwiazdy typu $\delta$ Scuti	22
1.5	Cel pracy	24
<b>2</b>	<b>Poszukiwanie gwiazd RR Lutni z modami nieradialnymi</b>	<b>26</b>
2.1	Metoda analizy	26
2.1.1	Metoda iteracyjnego odejmowania częstości	28
2.1.2	Metoda odejmowania częstości zależna od czasu	29
2.1.3	Automatyczny skrypt do analizy danych fotometrycznych	33
2.2	Gwiazdy RR <sub>0.61</sub>	35
2.2.1	Subharmoniki dodatkowych sygnałów w gwiazdach RR <sub>0.61</sub>	39
2.2.2	Gwiazdy z więcej niż jednym sygnałem	43
2.2.3	Niestacjonarność modów nieradialnych i ich harmonik	44
2.3	Gwiazdy RR <sub>0.68</sub>	50
2.4	Występowanie dodatkowych sygnałów a efekt Błażki	57
<b>3</b>	<b>Spektroskopowa detekcja modów nieradialnych</b>	<b>59</b>
3.1	Syntetyczne profile linii	60
3.1.1	Syntetyczne profile linii widmowych	60
3.1.2	Parametry gwiazdy	61
3.1.3	Parametry modów pulsacji	62
3.1.4	Parametry linii widmowej	62
3.1.5	Pozostałe parametry symulacji	63
3.1.6	Analiza okresowości w serii widm	63
3.2	Zmiany profili linii	64
3.2.1	Wpływ inklinacji na detekcję modów nieradialnych	71
3.2.2	Porównanie różnych metod detekcji modu nieradialnego	72
3.3	Zmiany profili linii w realistycznym przypadku	74

<b>4</b>	<b>Modelowanie gwiazd RR Lutni</b>	<b>80</b>
4.1	Kod pulsacyjny . . . . .	80
4.2	Badana próbka gwiazd . . . . .	80
4.3	Siatka modeli . . . . .	81
4.4	Wyniki . . . . .	89
4.5	Dyskusja . . . . .	92
4.5.1	Dopasowanie gwiazd RR <sub>0.61</sub> . . . . .	92
4.5.2	Porównanie wyznaczonych parametrów fizycznych z innymi przewidywaniami teoretycznymi . . . . .	98
4.5.3	Porównanie z obserwowanymi wartościami . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Poszukiwanie wielomodalnych gwiazd <math>\delta</math> Scuti</b>	<b>105</b>
5.1	Metody . . . . .	105
5.1.1	Wykorzystane dane . . . . .	105
5.1.2	Analiza częstości . . . . .	106
5.2	Wyniki . . . . .	109
5.2.1	Dodatkowe sygnały w gwiazdach $\delta$ Scuti . . . . .	109
5.2.2	Wielomodalne radialne gwiazdy $\delta$ Scuti . . . . .	111
5.2.3	Analiza gwiazd dwumodalnych F+1O . . . . .	113
<b>6</b>	<b>Modelowanie gwiazd typu <math>\delta</math> Scuti</b>	<b>116</b>
6.1	Obliczenia . . . . .	116
6.1.1	Dopasowanie modeli do obserwacji . . . . .	118
6.2	Wyniki . . . . .	121
6.2.1	Gwiazdy SX Phoenicis . . . . .	126
6.2.2	Porównanie parametrów fizycznych z innymi wyznaczeniami z literatury . . . . .	128
<b>7</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>132</b>
	<b>Dodatek A Parametry gwiazd RR<sub>0.61</sub> i RR<sub>0.68</sub></b>	<b>145</b>
	<b>Dodatek B Parametry gwiazd HADS</b>	<b>176</b>
	<b>Dodatek C Plik parametrów wejściowych kodu MESA</b>	<b>181</b>

## ROZDZIAŁ 1

# Wstęp

## 1.1 Pulsacje gwiazd

Pulsacje gwiazd są niczym innym jak falami rozchodzącymi się w ich wnętrzach. Fale te powodują zmiany rozmiarów, a czasem i kształtów gwiazdy. Objawiają się w postaci zmian jasności w obserwacjach fotometrycznych. Pulsacje wpływają także na zmiany kształtu linii widmowych ze względu na zmiany temperatury na powierzchni gwiazdy oraz ruchy powierzchni. Badanie pulsacji pozwala na wnioskowanie na temat własności wnętrza gwiazdowych, w których rozchodzą się fale. Stanowi to analogię do badań sejsmicznych wnętrza Ziemi. Fale w gwieździe mogą rozchodzić się jedynie z określonymi częstościami odpowiadającymi warunkom fizycznym panującym wewnątrz gwiazdy.

Na temat pulsacji gwiazd powstało wiele doskonałych podręczników (patrz np. [Aerts i in. 2010](#)). Poniżej przedstawione są najważniejsze informacje na temat pulsacji.

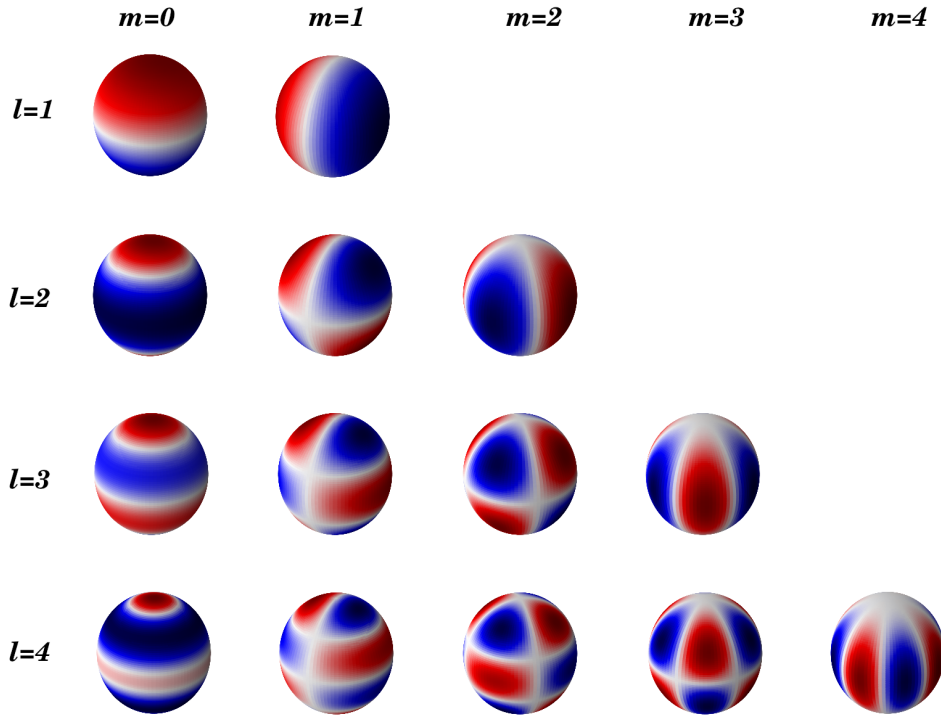
### 1.1.1 Pulsacje radialne i nieradialne

Sposób w jaki gwiazda pulsuje nazywamy modem pulsacji. Jest on opisywany przez częstotliwość oraz trzy liczby  $n$ ,  $\ell$  oraz  $m$ . Liczbę  $n$  nazywamy rzędem radialnym modu, liczbę  $\ell$  stopniem modu, a liczbę  $m$  rzędem azymutalnym ([Deubner i Gough 1984](#)). Rząd radialny,  $n$ , opisuje ile powierzchni węzłowych znajduje się we wnętrzu gwiazdy. Stopień modu,  $\ell$ , odpowiada liczbie linii węzłowych na powierzchni. Rząd azymutalny,  $m$ , mówi o tym ile z linii węzłowych na powierzchni przecina równik gwiazdy. Rząd radialny modu może przyjmować wartości 0, 1, 2 itd. Jeżeli stopień modu  $\ell = 0$  mówimy o modach radialnych. Podczas pulsacji w modach radialnych, symetria sferyczna gwiazdy jest zachowana. Podstawowym modem radialnym jest mod fundamentalny, w którym nie istnieje żadna powierzchnia węzłowa we wnętrzu gwiazdy ( $n = 0$ ). Następny mod z jedną powierzchnią węzłową nazywa się pierwszym owertonem, mod z dwoma powierzchniami węzłowymi – drugim owertonem, itd. W przypadku  $\ell > 0$  mamy do czynienia z modami nieradialnymi, w których gwiazda podczas pulsacji zmienia również swój kształt. Zmiana kształtu jest opisywana za pomocą harmonik sferycznych:

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = (-1)^m N_\ell^{|m|} P_\ell^{|m|}(\mu) e^{im\phi}, \quad (1.1)$$

które zależą od liczb  $\ell$  i  $m$  i opisują zależności kątowe, a  $\theta$  i  $\phi$  odpowiadają współrzędnym kątowym. Czynniki  $N_\ell^{|m|}$  jest czynnikiem normalizacyjnym, a  $P_\ell^{|m|}(\mu)$  jest stowarzyszoną funkcją Legendre’a, gdzie  $\mu = \cos \theta$ . Wizualizacja kilku harmonik sferycznych jest zaprezentowana na [Rys. 1.1](#).

W przypadku pulsacji nieradialnych, na powierzchni gwiazdy powstają sąsiadujące sektory, które pulsują w przeciwnych fazach. Gdy  $\ell = 1$ , mówimy o modach dipolowych. W ich przypad-



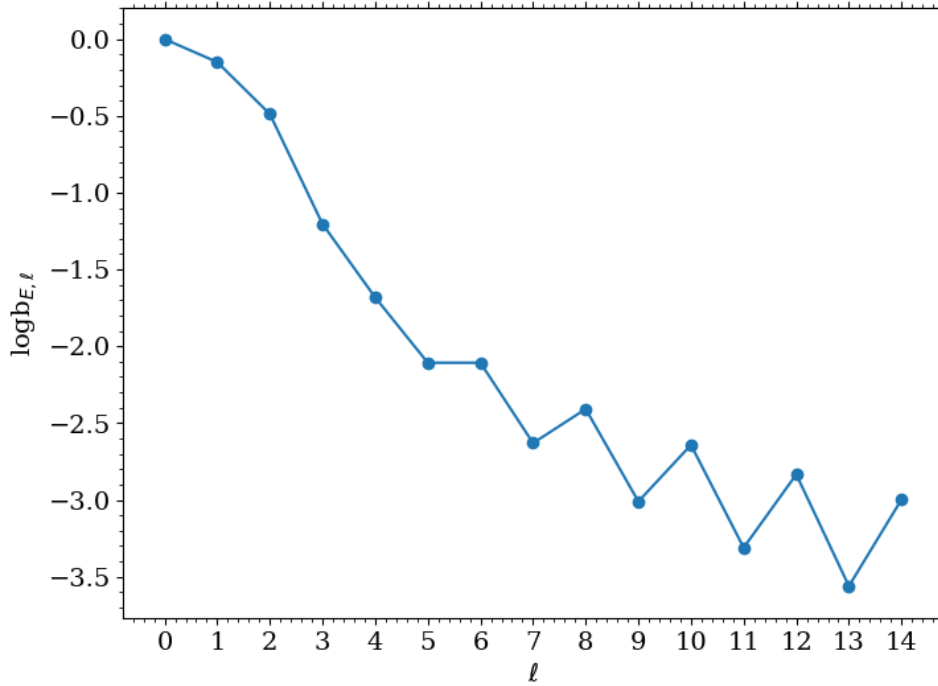
Rysunek 1.1: Wizualizacja harmonik sferycznych.

ku zawsze zachodzi  $n > 0$ . Mody o  $\ell = 2$  nazywamy kwadrupolowymi, itd. Rząd azymutalny,  $m$ , może przyjmować wartości  $m \in \{-\ell, \ell\}$ . Gdy  $m = 0$  mod pulsacji nazywamy strefowym. Dla  $m > 0$  mody nazywane są współbieżnymi, tzn. biegną zgodnie z rotacją gwiazdy, natomiast dla  $m < 0$  nazywane są przeciwbieżnymi i poruszają się w kierunku przeciwnym do rotacji gwiazdy. Gdy  $|m| = \ell$  mody nazywane są sektoralnymi. Wszystkie pozostałe wartości  $m$  odpowiadają modom teseralnym (patrz np. [Handler 2013](#)). W przypadku modów normalnych, są one opisywane jedynie przez liczby  $n$  i  $\ell$ , czyli zachodzi degeneracja stopnia  $2\ell + 1$ . Degeneracja może zostać zniesiona w przypadku obecności na przykład rotacji lub pola magnetycznego (patrz np. [Lovekin i Deupree 2008](#)).

Podzielenie się powierzchni gwiazdy na sektory o przeciwnych fazach pulsacji ma konsekwencje obserwacyjne. Im większy stopień modu, tym więcej sektorów znajduje się na powierzchni. Co za tym idzie, obserwując zmiany jasności pochodzące z całej powierzchni gwiazdy, obserwujemy uśredniony efekt pulsacji. Zatem obserwowana amplituda pulsacji maleje wraz ze wzrostem stopnia modu. Jest to efekt uśredniania geometrycznego i jest tym silniejszy im wyższy stopień modu, oraz, przy wyższych  $\ell$ , jest silniejszy dla modów o stopniu nieparzystym ([Dziembowski 1977a](#)). Współczynnik opisujący efekt uśredniania jest przedstawiony na Rys. 1.2. Został on policzony przy założeniu pociemnienia brzegowego w przybliżeniu Eddingtona.

### 1.1.2 Pulsacje wielomodalne

Gwiazdy mogą także pulsować w kilku modach jednocześnie. Najprostszym przykładem są pulsacje dwumodalne w modzie fundamentalnym oraz pierwszym owertonie. W taki sposób pulsują niektóre Cefeidy klasyczne, gwiazdy RR Lutni typu RRd oraz niektóre gwiazdy  $\delta$  Scuti. W przypadku gwiazd badanych w tej pracy, będziemy rozważać jedynie gwiazdy, w których obserwujemy większą liczbę modów radialnych, bądź jednoczesne pulsacje w modach radialnych



Rysunek 1.2: Współczynnik uśredniania  $b_{E,\ell}$  przy założeniu pociemnienia brzegowego w przybliżeniu Eddingtona.

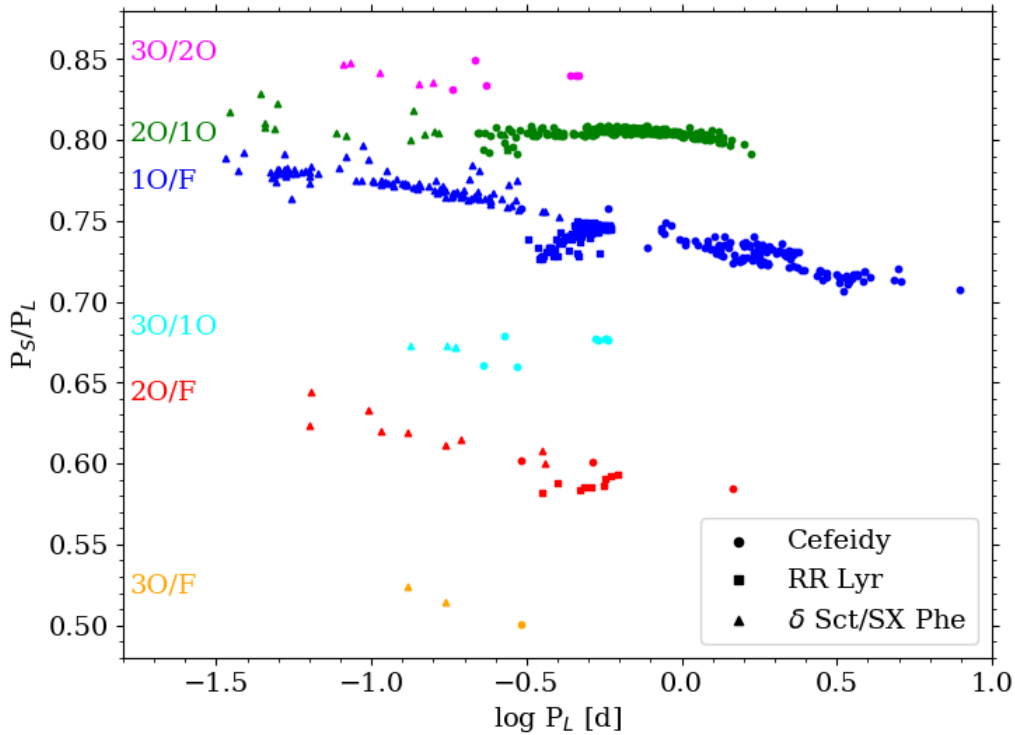
i nieradialnych. W gwiazdach istotny jest fakt, że kolejny owerton nie ma częstotliwości dwa razy większej od poprzedniego owertonu. Zatem owerton nie jest jednoznaczny z harmoniką. Jest to spowodowane tym, że w gwiazdach istnieją gradienty temperatury i średniej wagi cząsteczkowej,  $\mu$ , które mają wpływ na gradient prędkość dźwięku,  $c_s$ . Jest tak, ponieważ zachodzi relacja:

$$c_s \sim \frac{T}{\mu}. \quad (1.2)$$

Stosunki okresów dla modów radialnych najwygodniej przedstawia się przy pomocy diagramu Petersena, tzn. diagramu stosunku okresów w funkcji dłuższego okresu bądź jego logarytmu (Petersen 1973). Diagram Petersena dla Cefeid klasycznych, gwiazd RR Lutni oraz gwiazd  $\delta$  Scuti jest przedstawiony na Rys. 1.3. W przypadku Cefeid klasycznych stosunek okresów pierwszego owertonu do okresu modu fundamentalnego wynosi  $P_{10}/P_F \approx 0.71 - 0.74$  (np. Soszyński i in. 2015). Ten sam stosunek okresów dla gwiazd typu RR Lutni wynosi około 0.74 (np. Soszyński i in. 2019b), natomiast dla gwiazd  $\delta$  Scuti 0.76 – 0.78 (np. Pietrukowicz i in. 2013). Jest to odzwierciedleniem różnic w budowie wewnętrznej tych rodzajów gwiazd pulsujących. Cefeidy klasyczne będąc zaawansowanymi ewolucyjnie olbrzymami mają gęste jądro z rozciągniętą otoczką. Zatem mają znacznie większy gradient gęstości w porównaniu do gwiazd  $\delta$  Scuti, które są gwiazdami ciągu głównego. Dodatkowo, stosunki okresów silnie zależą od metaliczności gwiazdy. Im wyższa metaliczność tym niższy stosunek okresów. Same stosunki okresów przekazują już zatem istotną informację o parametrach gwiazdy.

### 1.1.3 Mody ciśnieniowe i grawitacyjne

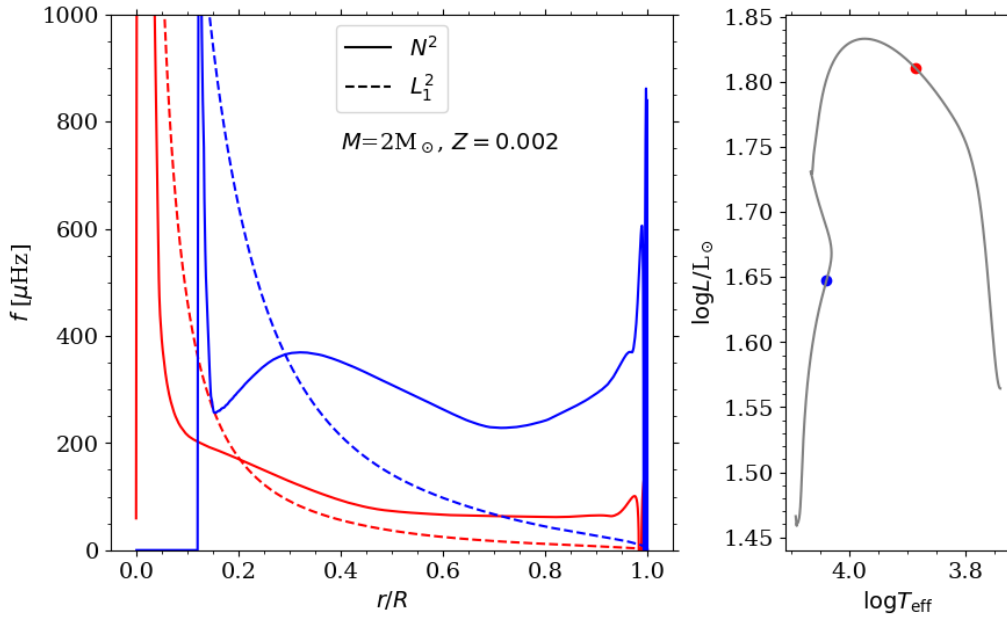
Mody pulsacji można podzielić ze względu na rodzaj siły, która stara się przywrócić gwiazdę do stanu równowagi, tzw. siły przywracającej. Wyróżniamy mody ciśnieniowe (p) oraz grawitacyjne (g). W przypadku modów ciśnieniowych, fale rozchodzące się we wnętrzu są falami



Rysunek 1.3: Diagram Petersena dla pulsacji radialnych w Cefeidach klasycznych (kółka), gwiazdach RR Luty (kwadraty) i gwiazdach  $\delta$  Scuti (trójkąty). Za pomocą odpowiednich kolorów zaznaczono stosunki okresów poszczególnych modów radialnych. F odpowiada pulsacjom w modzie fundamentalnym, 1O – pierwszym owertonie, 2O – drugim owertonie, a 3O – trzecim owertonie. Rysunek wykonano na podstawie danych z następujących źródeł: [Soszyński i in. \(2008, 2009, 2010a,b, 2011a,b\)](#); [Poleski i in. \(2010\)](#); [Pietrukowicz i in. \(2013\)](#).

akustycznymi, a siłą przywracającą jest ciśnienie. W przypadku modów grawitacyjnych siłą przywracającą jest siła wyporu. Mody radialne są zawsze modami ciśnieniowymi. Zgodnie z przyjętą konwencją, dla modów ciśnieniowych mamy  $n > 0$ , natomiast dla modów grawitacyjnych  $n < 0$ . Gdy  $n = 0$  mamy do czynienia z modami fundamentalnymi, nazywanymi czasami modami f, lub modami podstawowymi. Mody ciśnieniowe i grawitacyjne różnią się obserwowanymi cechami. W szczególności częstotści modów ciśnieniowych rosną wraz ze wzrostem rzędu radialnego, natomiast częstotści modów grawitacyjnych maleją. Mody ciśnieniowe są wrażliwe na warunki w otoczce gwiazdy, a mody grawitacyjne w jej wnętrzu, za wyjątkiem białych karłów, w których mody g są wrażliwe głównie na warunki w otoczce. Kolejną różnicą między modami ciśnieniowymi i grawitacyjnymi są ich relacje asymptotyczne, które zachodzą gdy  $n \gg \ell$ . Wówczas mody ciśnieniowe są równoodstępne w częstotściach, natomiast mody grawitacyjne są równoodstępne w okresach. Istnieją także mody mieszane, które mają charakter ciśnieniowy w otoczce, a we wnętrzu mają charakter modów grawitacyjnych. W poniższej pracy mody grawitacyjne nie będą rozważane. Lokalny charakter modu jest opisany za pomocą dwóch częstotści: Lamba ( $L_\ell^2$ ) oraz Brunta-Väisälä ( $N^2$ ). Częstotść Lamba, czyli częstotść akustyczna, jest odwrotnością czasu potrzebnego do przebycia jednej horyzontalnej długości fali przy lokalnej prędkości dźwięku. Opisana jest wzorem:

$$L_\ell^2 = (k_h c_s)^2 = \frac{\ell(\ell + 1)c_s^2}{r^2}, \quad (1.3)$$



Rysunek 1.4: Przebieg częstości Brunta-Väisälä (linia ciągła) oraz Lamba (linia przerywana) dla  $\ell = 1$  w modelu gwiazdy o masie  $2 M_{\odot}$  i  $Z = 0.002$ . Na prawym panelu przedstawiona jest ścieżka ewolucyjna wraz z zaznaczonymi wybranymi modelami zaprezentowanymi na lewym panelu.

gdzie  $k_h = \frac{2\pi}{\lambda_h}$  to horyzontalna liczba falowa,  $\lambda_h$  to horyzontalna długość fali a  $c_s = \sqrt{\frac{\Gamma_1 p}{\rho}}$  to prędkość dźwięku, przy czym  $\Gamma_1 = \frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho}$  jest wskaźnikiem adiabatycznym, a  $\rho$  i  $p$  odpowiadają gęstości oraz ciśnieniu. Natomiast częstość Brunta-Väisälä:

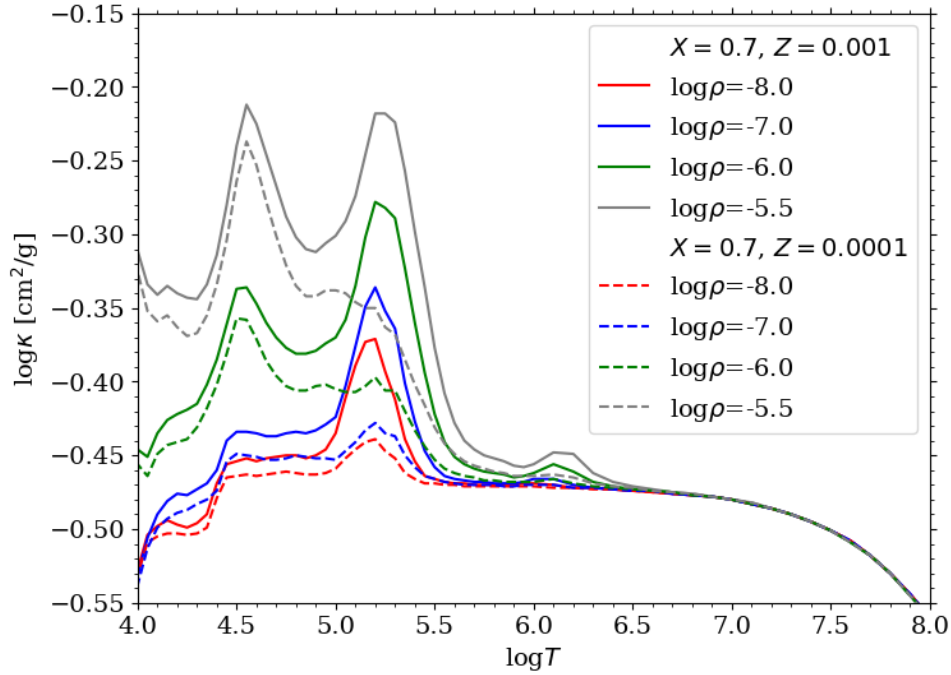
$$N^2 = g \left( \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right), \quad (1.4)$$

gdzie  $g$  jest przyspieszeniem grawitacyjnym, opisuje częstotliwość z jaką element gazu może oscylować wokół położenia równowagi pod wpływem siły grawitacji. Gdy częstość modu  $\omega^2 > L_{\ell}^2$  i  $\omega^2 > N^2$  mamy do czynienia z modami ciśnieniowymi, a gdy  $\omega^2 < L_{\ell}^2$  i  $\omega^2 < N^2$  mamy do czynienia z modami grawitacyjnymi. W obszarach pośrednich oscylacje są tłumione. Przebieg obu częstości jest przedstawiony na Rys. 1.4 w dwóch modelach gwiazdy o masie  $2 M_{\odot}$  i metaliczności  $Z = 0.002$ . Niebieski model odpowiada ewolucji na ciągu głównym, natomiast model zaznaczony na czerwono ewolucji po ciągu głównym.

### 1.1.4 Mechanizm wzbudzenia pulsacji i selekcji modów

To jaki mod będzie wzbudzony w gwieździe zależy od wielu czynników, które nie są w pełni zrozumiane. Wzbudzenie danego modu zależy między innymi od umiejscowienia strefy, w której są napędzane pulsacje. Jeżeli taka strefa znajduje się w miejscu, w którym dla danego modu znajdować się będzie węzeł, taki mod nie będzie wzbudzany. Wpływ na selekcję modów mają również warunki panujące w danej gwieździe. Przykładowo, silne pole magnetyczne obecne w niektórych gwiazdach może faworyzować wzbudzenie określonych modów. W przypadku gwiazd roAp (*rapidly oscillating Ap*) obecne jest silne dipolowe pole magnetyczne, które faworyzuje obecność modów dipolowych. W przypadku białych karłów mamy do czynienia z warstwową strukturą wewnętrzną, która również może wpływać na preferowanie niektórych modów pulsacji.





Rysunek 1.5: Przebieg współczynnika nieprzezroczystości  $\kappa$  Rosselanda na podstawie uaktualnionych tablic średnich nieprzezroczystości Rosselanda OPAL (Iglesias i Rogers 1996) dla dwóch metaliczności.

Dodatkowym czynnikiem, decydującym o możliwości wzbudzenia konkretnych modów, są skale czasowe charakterystyczne dla danych gwiazd. Okresy pulsacji,  $P$ , w danym modzie muszą być tego samego rzędu wielkości co skala termiczna Kelvina-Helmholtza w strefie napędzającej oscylacje, lub dłuższe. Skala czasowa Kelvina-Helmholtza,  $\tau_{\text{KH}}$ , dana jest wzorem:

$$\tau_{\text{KH}} = \int_{m(r)}^{m(R)} \frac{c_p T dm}{L}, \quad (1.5)$$

gdzie  $c_p$  to pojemność cieplna przy stałym ciśnieniu w przemianie adiabatycznej,  $T$  to temperatura, a  $L$  to jasność. W przeciwnym wypadku, gdy  $P \ll \tau_{\text{KH}}$ , warstwa napędzająca pulsacje pozostaje w równowadze termodynamicznej (np. Pamyatnykh 1999). Jednak część modów, dla których są spełnione powyższe warunki, nie jest wzbudzona ze względu na silne tłumienie ich w innych warstwach gwiazdy. To średni balans pomiędzy wzbudzeniem a tłumieniem dla całej gwiazdy decyduje, czy dany mod zostanie wzbudzony, czy nie. Czasem, pomimo tłumienia, mody mogą być stochastycznie wzbudzone, jak w przypadku wzbudzania oscylacji typu słonecznego przez konwekcję. Porównanie obserwacji z przewidywaniami teoretycznymi pokazuje jednak, że część modów nie jest obecna w danej gwiazdzie pomimo tego, że model teoretyczny przewiduje ich wzbudzenie. Muszą zatem działać dodatkowe mechanizmy selekcji modów, które nie są w pełni zrozumiane.

Aby gwiazda mogła stabilnie pulsować, musi istnieć mechanizm napędzania pulsacji. Pulsacje mogą być samowzbudzone lub wzbudzone poprzez działanie sił zewnętrznych. W przypadku pulsacji samowzbudzanych w gwiazdzie znajdują się obszary, które działają podobnie jak silnik cieplny. Pulsacje wzbudzone przez siły zewnętrzne to przykładowo pulsacje wzbudzone stochastycznie przez turbulentną konwekcję, jak w przypadku pulsacji typu słonecznego. Przegląd i dokładny opis różnych mechanizmów wzbudzania jest obszernie przedyskutowany przez np.

Samadi i in. (2015). Dla gwiazd rozważanych w tej pracy mechanizmem wzbudzenia pulsacji jest mechanizm nieprzezroczystości  $\kappa$ . Polega on na tym, że w gwieździe istnieje warstwa, która podczas sprężania magazynuje energię. Taką warstwą jest warstwa, w której wraz ze wzrostem temperatury i gęstości rośnie nieprzezroczystość,  $\kappa$ . Wówczas strumień promieniowania ku powierzchni jest blokowany przez tę warstwę i zamienia się na energię kinetyczną pulsacji. W ogólności wraz ze wzrostem temperatury nieprzezroczystość spada, zgodnie z prawem Kramersa  $\kappa \sim \rho T^{-3.5}$ . Jednak istnieją lokalne maksima związane z warstwami częściowej jonizacji pierwiastków. Przykładowy przebieg współczynnika nieprzezroczystości  $\kappa$  Rosselanda jest przedstawiony na Rys. 1.5 na podstawie uaktualnionych tablic średnich nieprzezroczystości Rosselanda OPAL (Iglesias i Rogers 1996). Warstwa drugiej jonizacji helu odpowiada temperaturom  $4.5 - 5.0 \cdot 10^4$  K i jest odpowiedzialna za napędzanie pulsacji między innymi w Cefeidach klasycznych, gwiazdach RR Lutni i  $\delta$  Scuti. W zależności od struktury wewnętrznej gwiazdy, warstwa ta znajduje się na różnych głębokościach i ma różne gęstości. Jeżeli znajduje się ona zbyt blisko powierzchni dla gwiazd gorących, ilość energii zaabsorbowanej przez materię o małej gęstości nie jest wystarczająca do podtrzymania pulsacji. Odpowiada to niebieskiej granicy tzw. klasycznego pasa niestabilności, do którego należą Cefeidy klasyczne oraz gwiazdy RR Lutni. Natomiast dla gwiazd o niższych temperaturach efektywnych, zewnętrzne warstwy konwektywne sięgają głębszych warstw gwiazdy. Efektywność transportu energii przez konwekcję powoduje zmniejszenie się strumienia promienistego i uniemożliwia gromadzenie się energii w warstwie napędzającej pulsację. Odpowiada to czerwonej granicy klasycznego pasa niestabilności. Na przecięciu klasycznego pasa niestabilności z ciągiem głównym znajdują się gwiazdy  $\delta$  Scuti. Teoretycznie, pulsacje powinny być wzbudzone we wszystkich gwiazdach znajdujących się w obszarze klasycznego pasa niestabilności. Jednak obserwacje pokazują, że część gwiazd nie pulsuje. Murphy i in. (2019) przeanalizowali gwiazdy znajdujące się w rejonie pasa niestabilności odpowiadającego pulsacjom typu  $\delta$  Scuti i pokazali, że część z nich nie wykazuje pulsacji. Autorzy ci także pokazali, że w zależności od położenia w pasie niestabilności procent gwiazd pulsujących się zmienia. Rejon pasa niestabilności zajmowany przez Cefeidy został przeanalizowany pod tym kątem przez Narloch i in. (2019). Procent gwiazd niepulsujących został oszacowany na 21 – 30% na podstawie danych OGLE dla Wielkiego Obłoku Magellana.

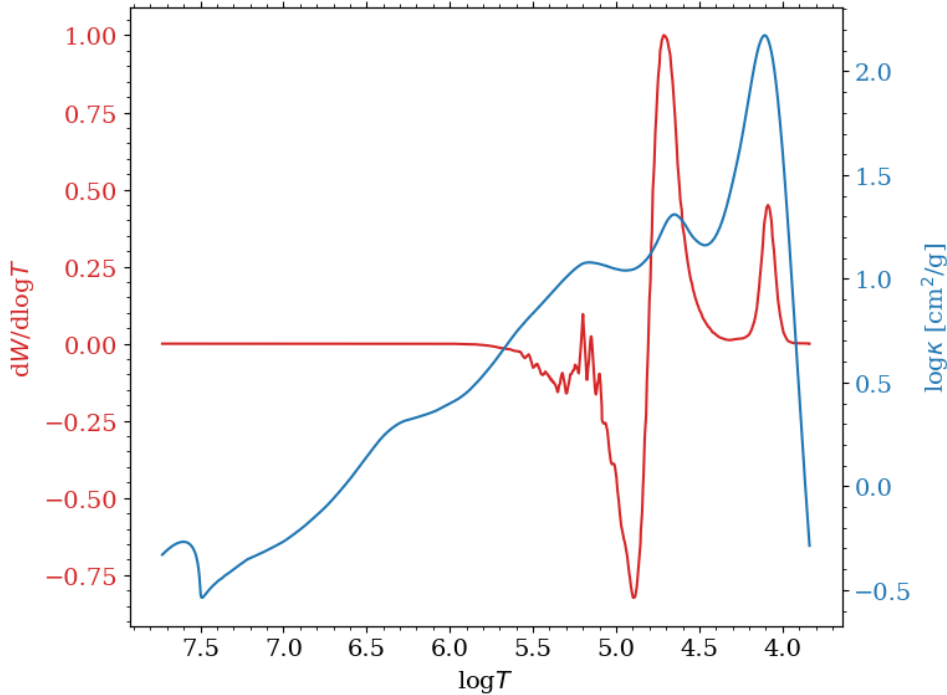
Równania opisujące pulsacje gwiazd są wyczerpująco opisane w wielu monografiach (jak np. Unno i in. 1989; Aerts i in. 2010). Rozwiązanie pełnych równań na pulsacje nieadiabaticzne pozwala na uzyskanie informacji o stabilności modów. Taka informacja jest tracona w przybliżeniu adiabatycznym. Innym sposobem na rozważanie stabilności modów jest rozważenie całki pracy, która opisuje wynikową pracę podczas jednego cyklu pulsacji i jest zdefiniowana w następujący sposób (Unno i in. 1989):

$$W = \oint \frac{dE}{dt} dt = \frac{\pi}{\omega} \int_0^M \left[ \frac{\delta T}{T} \delta \varepsilon - \frac{\delta T}{T} \delta \left( \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{F}_r \right) \right] dM_r. \quad (1.6)$$

Gdy  $W > 0$  energia pulsacji rośnie i są one napędzane. Pierwszy człon całki pracy zawierający wyrażenie  $\delta \varepsilon$  opisuje mechanizm  $\varepsilon$ , czyli wpływ zmian tempa reakcji jądrowych, które są zależne od temperatury i gęstości. Człon ten ma zawsze dodatni wkład do całki pracy, ale jest on zwykle pomijalny. W drugim członie można skorzystać z przybliżenia dyfuzyjnego  $\delta \nabla \cdot \mathbf{F}_r = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d\delta L_r}{dr}$ , gdzie  $L_r$  to lokalna moc promieniowania, a jej perturbacja wynosi:

$$\frac{\delta L_r}{L_r} = \frac{dr}{d \ln T} \frac{d}{dr} \left( \frac{\delta T}{T} \right) - \frac{\delta \kappa}{\kappa} + 4 \left( \frac{\delta T}{T} + \frac{\delta r}{r} \right). \quad (1.7)$$

Pierwszy człon powyższego równania opisuje straty promieniste i ma działanie stabilizujące pulsacje. Drugi człon to efekt  $\kappa$  związany z wpływem nieprzezroczystości. Trzeci człon opisuje



Rysunek 1.6: Wkład poszczególnych warstw do całki pracy w postaci  $dW/d \log T$  oraz przebieg współczynnika nieprzezroczystości w funkcji  $\log T$  dla modelu gwiazdy typu  $\delta$  Scuti o masie  $2M_{\odot}$ ,  $Z = 0.002$ ,  $Y = 0.27$  i o wieku  $5.9 \cdot 10^8$  lat. Model znajduje się na etapie ewolucji po ciągu głównym (czerwona kropka na Rys. 1.4).

wpływ zmiany promienia i temperatury.

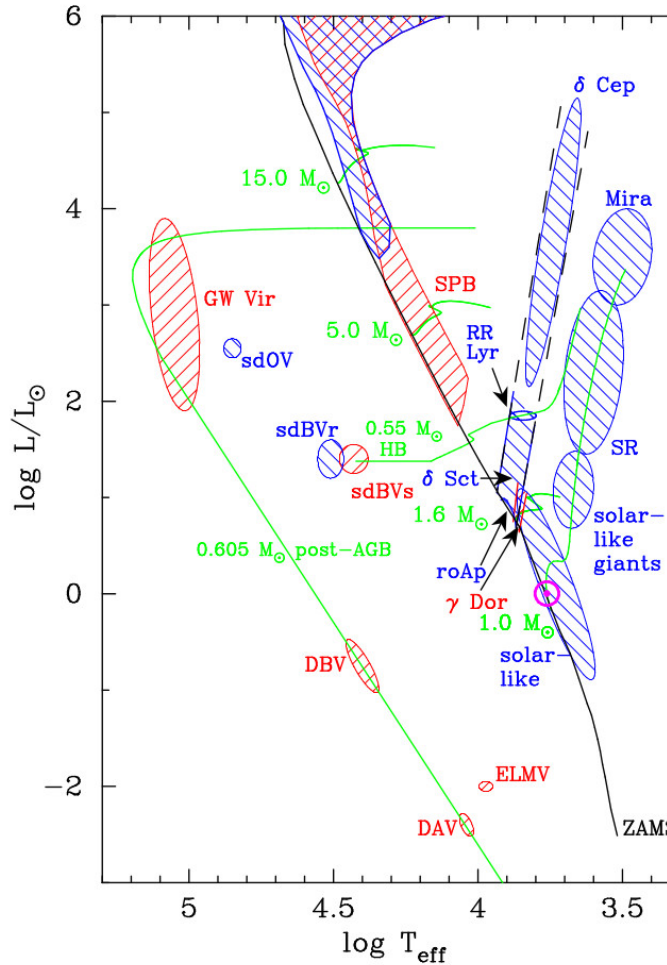
Wkład poszczególnych warstw do całki pracy w postaci  $dW/d \log T$  oraz przebieg współczynnika nieprzezroczystości w funkcji  $\log T$  są przedstawione na Rys. 1.6. Dodatni wkład do całki pracy mają warstwy, które odpowiadają lokalnym maksimum współczynnika nieprzezroczystości. Najwyższe maksimum w przebiegu  $\kappa$  odpowiada strefie jonizacji wodoru, natomiast niższe maksimum odpowiada strefie drugiej jonizacji helu i ma dominujący wkład w napędzaniu pulsacji.

### 1.1.5 Pulsacje na diagramie Hertzsprunga-Russela

Pulsacje są zjawiskiem powszechnym. Możemy je znaleźć w wielu rodzajach obiektów w każdym stadium ewolucji i w każdym rejonie diagramu Hertzsprunga-Russela (HR), zaczynając od gwiazd, które pulsują jeszcze przed zejściem na ciąg główny (Zwintz i in. 2014), poprzez gwiazdy ciągu głównego i olbrzymy, kończąc na białych karłach. Diagram HR z zaznaczonymi typami gwiazd pulsujących jest przedstawiony na Rys. 1.7. Mechanizm wzbudzający pulsacje, a także typy wzbudzonych pulsacji i ich charakterystyka różnią się pomiędzy różnymi obiektami, jednak w niniejszej rozprawie rozważane są jedynie gwiazdy należące do klasycznego pasa niestabilności.

### 1.1.6 Krzywe blasku gwiazd pulsujących

Pulsacje gwiazd mogą być obserwowane wykorzystując zarówno dane fotometryczne jak i spektroskopowe. Dzięki fotometrii, w krzywej blasku obserwujemy okresowe zmiany jasności.

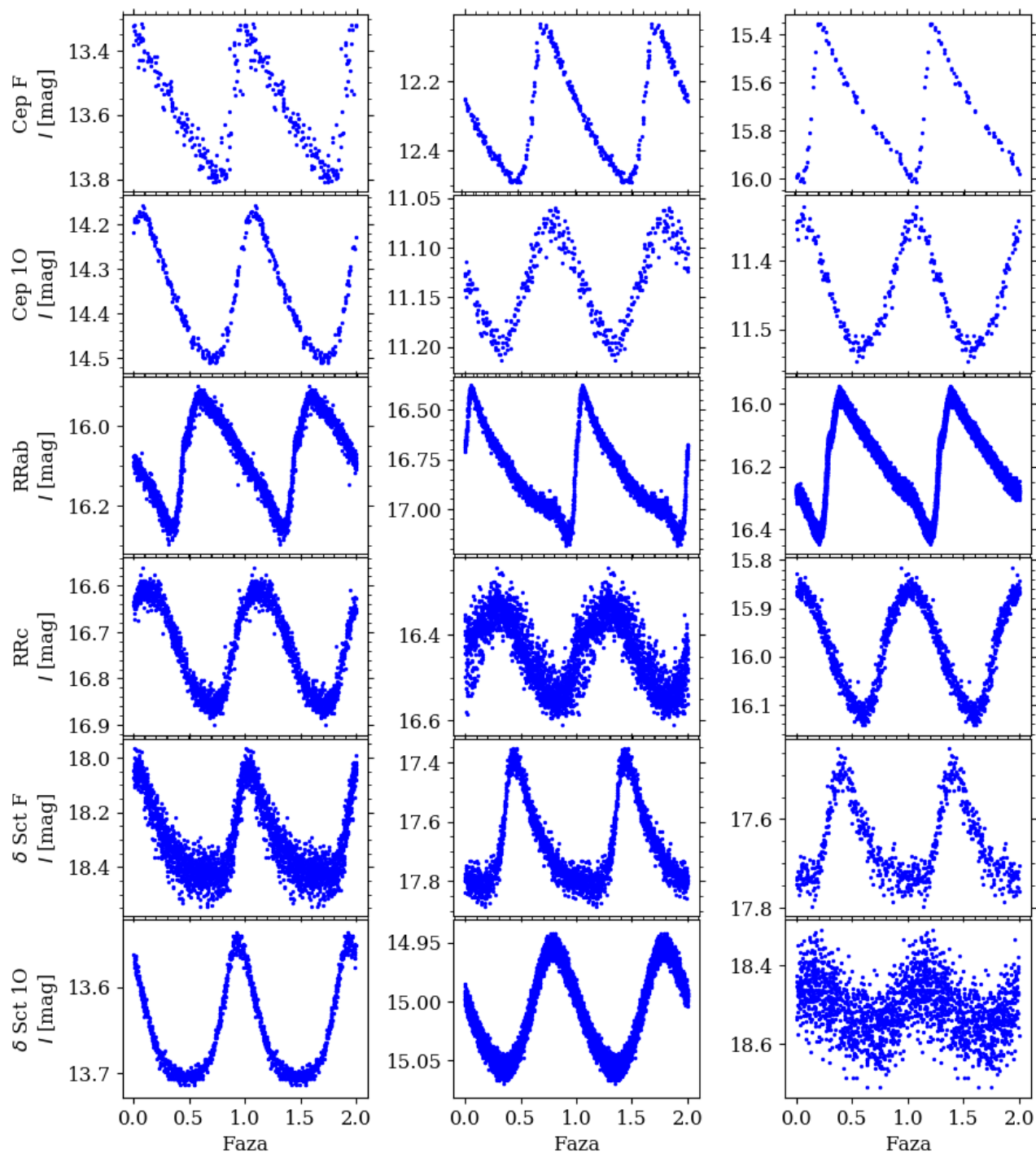


Rysunek 1.7: Diagram Hertzsprunga-Russela dla gwiazd pulsujących. Niebieski kolor odpowiada grupom gwiazd pulsujących w modach ciśnieniowych, a czerwony – w modach grawitacyjnych. Fragmenty ścieżek ewolucyjnych odpowiadających gwiazdom o różnych masach są zaznaczone na zielono. Rysunek dzięki uprzejmości prof. G. Handlera.

Przykłady krzywych blasku Cefeid klasycznych pulsujących w modzie fundamentalnym i pierwszym owertonie, gwiazd RR Lutni pulsujących w modzie fundamentalnym (RRab) i pierwszym owertonie (RRc) oraz gwiazd  $\delta$  Scuti pulsujących najprawdopodobniej w modzie fundamentalnym (F) i pierwszym owertonie (1O) są zaprezentowane na Rys. 1.8. Na podstawie kształtu krzywej blasku, w przypadku gwiazd RR Lutni oraz Cefeid klasycznych, możemy określić, w jakim modzie pulsuje dana gwiazda. W tych gwiazdach, pulsacje w modzie fundamentalnym najczęściej obserwowane są jako asymetryczne krzywe o szybkim wzroście i wolniejszym spadku jasności. Mają również relatywnie dużą amplitudę. Natomiast pulsacje w modach owertonowych w tych gwiazdach mają najczęściej mniejsze amplitudy oraz bardziej symetryczne krzywe blasku. Krzywe blasku gwiazd  $\delta$  Scuti wyróżniają się większą różnorodnością i w ich przypadku nie zawsze da się w prosty sposób określić mod pulsacji na podstawie samej krzywej blasku.

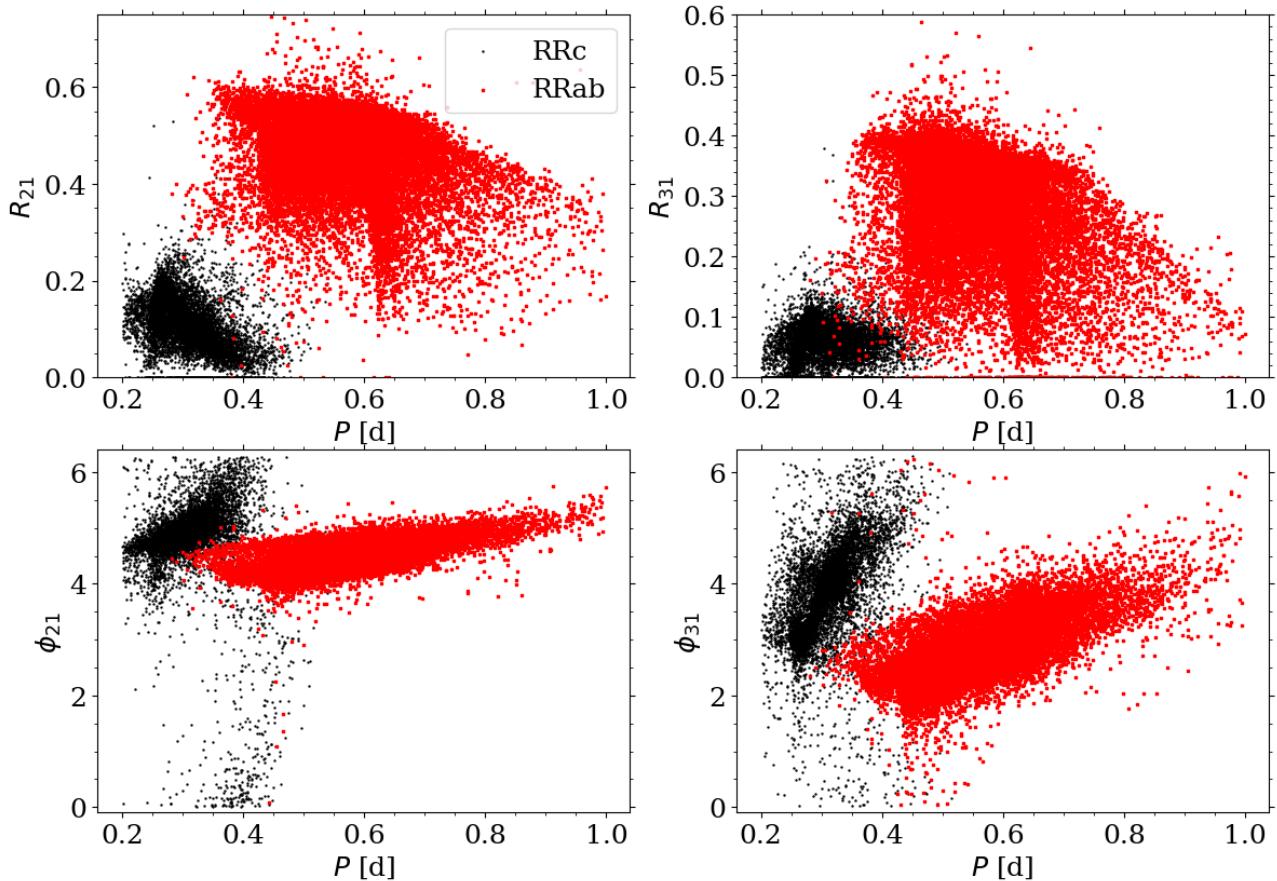
Aby scharakteryzować kształt krzywej blasku wykorzystuje się współczynniki Fouriera. Krzywą blasku opisuje się za pomocą szeregu Fouriera następującej postaci:

$$m(t) = m_0 + \sum_{k=1}^N A_k \sin[\omega k(t - t_0) + \phi_k], \quad (1.8)$$



Rysunek 1.8: Przykładowe krzywe blasku Cefeid, gwiazd RR Lutni oraz gwiazd  $\delta$  Scuti pulsujących w modzie fundamentalnym lub pierwszym owertonie na podstawie danych OGLE-IV.





Rysunek 1.9: Współczynniki Fouriera w funkcji okresu dla gwiazd RRc i RRab ze zgrubienia centralnego Galaktyki na podstawie danych OGLE-IV (Soszyński i in. 2019b).

gdzie  $m_0$  to średnia jasność, częstość kołowa  $\omega = 2\pi/P$ ,  $P$  to okres pulsacji, a  $A_k$  i  $\phi_k$  to amplitudy i fazy kolejnych wyrazów rozwinięcia. Wówczas współczynniki Fouriera zdefiniowane są jako stosunki amplitud (Simon i Lee 1981):

$$R_{k1} = \frac{A_k}{A_1}, \quad (1.9)$$

oraz niezależne od  $t_0$  różnice faz:

$$\phi_{k1} = \phi_k - k\phi_1. \quad (1.10)$$

Współczynniki Fouriera w funkcji okresu dla gwiazd RRc i RRab są zaprezentowane na Rys. 1.9. Gwiazdy RRc i RRab tworzą odrębne grupy, co odzwierciedla różnice w kształtach krzywych blasku. Korzystając ze współczynników Fouriera możliwe jest zatem określenie dominującego modu pulsacji w gwiazdach RR Lutni i analogicznie również w Cefeidach klasycznych. Wykorzystanie współczynników Fouriera dla gwiazd  $\delta$  Scuti jest dyskutowane w rozdziale 5.

Obserwacje fotometryczne w wielu filtrach, a także obserwacje prędkości radialnych są także bardzo przydatne w identyfikacji modów pulsacji, zarówno radialnych jak i nieradialnych. Wykorzystuje się w tym celu diagramy diagnostyczne, na których umieszcza się teoretyczne przewidywania stosunku amplitud oraz różnic faz w różnych filtrach, a następnie porównuje z wartościami obserwowanymi. Przykładowo, na rys. 3 w pracy Daszyńska-Daszkiewicz i in. (2002) zaprezentowany jest diagram diagnostyczny dla filtrów Strömgrena dla gwiazd typu

$\beta$  Cep. Daszyńska-Daszkiewicz i in. (2020a) wykorzystali wielobarwną fotometrię, aby zidentyfikować mody obserwowane w gwiazdzie SX Phe jako mody radialne.

Pulsacje gwiazdowe wpływają także na kształt linii widmowych. Pulsacje radialne są obserwowane w postaci przesuwających się linii widmowych w stosunku do średniej prędkości radialnej (patrz np. Rys. 3.2 w rozdziale 3). Przesunięcia są spowodowane ruchem powierzchni gwiazdy. Pulsacje nieradialne wpływają na zmiany kształtu linii (patrz np. rys. 1 oraz rys. 2 w Aerts i Eyer 2000). Charakterystyczne zmiany kształtu linii widmowych także są wykorzystywane w celu identyfikacji modów pulsacji (np. Aerts i Eyer 2000; Vučković i in. 2009; Hekker i Aerts 2010; Uytterhoeven 2014a).

## 1.2 Asterosejsmologia

Asterosejsmologia jest dziedziną astrofizyki, która zajmuje się badaniem wnętrz gwiazd dzięki obserwacji i analizie ich pulsacji. Mody pulsacji, które mogą być wzbudzone w gwiazdzie, i ich obserwowane częstości zależą od warunków wewnętrznych. Obserwowane częstości modów pulsacji zatem można porównywać z częstościami pulsacji w modelach teoretycznych i w ten sposób wnioskować na temat wnętrza. Zastosowanie asterosejsmologii ma ogromne znaczenie w astronomii. Nie tylko bowiem pozwala na wyznaczanie parametrów fizycznych gwiazd, ale także na testowanie założeń fizycznych w modelach teoretycznych. W szczególności, na podstawie badań asterosejsmicznych podniesiono problem niepoprawnych tablic nieprzezroczystości, które uniemożliwiały między innymi wyjaśnienie wzbudzania modów pulsacji w gwiazdach pulsujących typu  $\beta$  Cep (Simon 1982), dzięki czemu tablice nieprzezroczystości mogły zostać poprawione (Iglesias i Rogers 1996), choć problem niezgodności modeli z obserwacjami ze względu na tablice nieprzezroczystości dalej jest aktualny (Daszyńska-Daszkiewicz i in. 2020b). Tak samo asterosejsmologia pozwala na badanie innych aspektów modelowania fizyki we wnętrzach, jak na przykład przestrzeliwania z otoczki konwektywnej lub z jądra (patrz np. Deheuvels i in. 2015b) czy parametrów konwekcji (patrz artykuł przeglądowy Aerts 2021, i referencje tamże).

Podstawowe zastosowanie asterosejsmologii to wyznaczanie parametrów fizycznych gwiazd. W przypadku Słońca oraz gwiazd z pulsacjami typu słonecznego, pulsacje w modach ciśnieniowych są wzbudzane stochastycznie przez turbulentną konwekcję (np. Samadi i in. 2015). Wzbudzana jest duża liczba modów. W przypadku Słońca liczba ta jest rzędu  $10^6 - 10^7$  modów. Tworzą one charakterystyczne struktury w widmie częstości o charakterystycznych separacjach pomiędzy poszczególnymi modami o danych  $n$  i  $\ell$ . Separacje te pozwalają na określenie gęstości gwiazd, a co za tym idzie masy i promienia, a także na określenie gradientu prędkości dźwięku, który pozwala na oszacowanie wieku gwiazdy (patrz np. Christensen-Dalsgaard 2021).

Jak już wspomniano wcześniej, obecność rotacji lub pola magnetycznego pozwala na zniesienie degeneracji związanej z rzędem azymutalnym  $m$ . Rozszczepienie rotacyjne modów pozwala na badanie rotacji we wnętrzach gwiazd. Różne mody pulsacji rozchodzą się w różnych warstwach gwiazd. Mody ciśnieniowe rozchodzą się głównie w otoczce, natomiast mody grawitacyjne we wnętrzu. Na pewnych etapach ewolucji, jest możliwe sprzężenie się modów ciśnieniowych występujących w otoczce z modami grawitacyjnymi we wnętrzu. Mówi się wówczas o modach mieszanych, które próbują większość głębokości gwiazdy. Im więcej mamy wzbudzonych modów w gwiazdzie, tym bardziej kompleksowo można zbadać jej wnętrze. W przypadku gwiazd typu słonecznego, a także w czerwonych olbrzymach z warstwami konwektywnymi w otoczce, nie ma możliwości obserwacji modów grawitacyjnych. Natomiast w przypadku olbrzymów jest możliwość zaobserwowania modów mieszanych, które pozwalają na badanie rotacji warstw wewnętrznych (np. Deheuvels i in. 2015a). Wykorzystanie modów grawitacyjnych i mieszanych w celu badania transportu momentu pędu we wnętrzach gwiazd zostało przedyskutowane przez

[Aerts i in. \(2019\)](#).

Wykorzystanie asterosejsmologii dla białych karłów pozwala na badanie ich mas, stratyfikacji chemicznej warstw, a także rotacji wewnętrznej i wielkości pól magnetycznych (patrz np. [Córscico 2020](#), i referencje tamże).

Powyżej jedynie naszkicowano możliwości i wyniki zastosowania asterosejsmologii do badania gwiazd. W kontekście niniejszej rozprawy, głównym celem było wykorzystanie modeli ewolucyjnych i sejsmicznych w celu określenia podstawowych parametrów fizycznych gwiazd z klasycznego pasa niestabilności. Parametry możliwe do określenia to między innymi masa, jasność, temperatura efektywna, metaliczność czy wiek. Dla badanych gwiazd większość z tych parametrów nie jest określona na podstawie innych obserwacji.

Aby móc wykorzystywać gwiazdy do asterosejsmologii, konieczne jest zidentyfikowanie modów pulsacji. Na podstawie modeli teoretycznych wyznacza się okresy dla konkretnych modów opisanych za pomocą rzędu radialnego oraz stopnia modu. Wobec tego należy wiedzieć, jakie mody są wzbudzone w obserwowanej gwiazdzie, aby dokonać poprawnego porównania. Identyfikacja modów jest możliwa za pomocą fotometrii bądź spektroskopii. W przypadku wielomodalnych pulsacji radialnych, możliwa jest także identyfikacja na podstawie stosunków okresów pomiędzy modami radialnymi. Dodatkowo, praktyczne wykorzystanie asterosejsmologii wymaga obserwacji kilku modów pulsacji równocześnie. Już trzy mody pulsacji pozwalają na ograniczenie parametrów fizycznych gwiazdy za pomocą porównania z modelami sejsmicznymi ([Moskalik i Dziembowski 2005](#)). W niniejszej rozprawie do analizy asterosejsmicznej zostały wybrane jedynie gwiazdy pulsujące co najmniej w trzech modach jednocześnie.

W rozprawie będą wykorzystane liniowe kody pulsacyjne, to znaczy takie kody, w których równania pulsacji są linearyzowane. Zatem wyznaczone teoretycznie okresy pulsacji są liniowe. Tym niemniej efekty nieliniowe wpływają na zmiany wartości okresów. W pracy [Kolláth i Buchler \(2001\)](#) zbadano wpływ efektów nieliniowych na stosunki okresów modów radialnych. Stosunki nieliniowych okresów są zwykle mniejsze od stosunków liniowych okresów o około kilka dziesiątych procenta. Dodatkowym ograniczeniem na rozważane modele teoretyczne są tempa narastania modów, które zawierają informację, czy dany mod jest wzbudzony czy tłumiony w gwiazdzie.

### 1.3 Gwiazdy RR Lutni oraz Cefeidy klasyczne

Gwiazdy RR Lutni oraz Cefeidy klasyczne to tzw. klasyczne gwiazdy pulsujące. Na diagramie HR znajdują się w klasycznym pasie niestabilności, przy czym Cefeidy mają wyższe jasności niż gwiazdy RR Lutni, a także dłuższe okresy pulsacji. [Goodricke \(1786\)](#) zauważył okresowe zmiany jasności gwiazdy  $\delta$  Cep, która jest prototypem tej klasy obiektów. Obserwowany okres wynosił ponad 5 dni, przy czym już wtedy zwrócono uwagę na asymetryczną krzywą blasku o szybszym wzniesieniu i wolniejszym spadku. Jak wiadomo obecnie, jest to charakterystyczne dla pulsacji w modzie fundamentalnym. Pierwsze odkrycie Cefeidy miało jednak miejsce wcześniej. [Pigott \(1785\)](#) zauważył podobne okresowe zmiany jasności w gwiazdzie  $\eta$  Aquilae. Zaobserwował okres ponad 7 dni, również z asymetryczną krzywą blasku. Natura tej zmienności nie była jednak przedyskutowana przez obserwatorów.

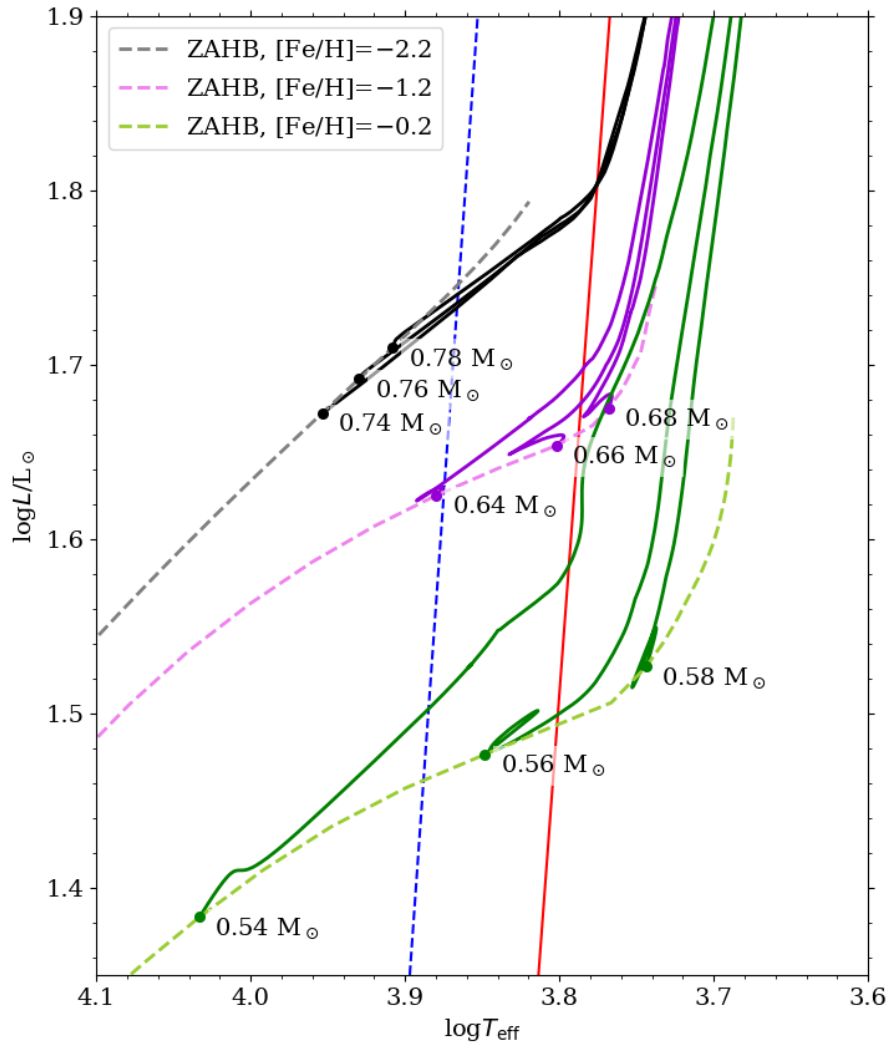
Zmienność gwiazdy RR Lyr, prototypu klasy, została zauważona podczas obserwacji 64 nowych gwiazd zmiennych ([Pickering i in. 1901](#)) jako gwiazdy o dużej amplitudzie zmienności. Tak jak w przypadku Cefeid, nie była to jednak pierwsza gwiazda typu RR Lutni, którą odkryto. Początkowo gwiazdy RR Lutni nie stanowiły odrębnej klasy, ale były traktowane jako krótkookresowe odpowiedniki Cefeid znajdujące w gromadach kulistych ([Shapley 1916](#)). Ówczesnym akceptowanym wytłumaczeniem obserwowanej zmienności w Cefeidach oraz ich krótkookresowo-



wych odpowiednikach była zmienność związana z zaćmieniami w układach podwójnych. Jednak ta teoria nie była w stanie wytłumaczyć następnych odkryć, mianowicie okresowości zmian w typach widmowych skorelowanych z okresem zmian jasności. [Shapley \(1914\)](#) podsumował argumenty przemawiające przeciwko hipotezie o układach podwójnych. W tym samym okresie powstał diagram Herzsprunga-Russela, którego autorzy zauważyli, że Cefeidy są gwiazdami o jasnościach znacznie większych od Słońca. Oznaczało to, że ich rozmiary w porównaniu do rozmiarów hipotetycznej orbity byłyby nierealistycznie duże. Ze względu na podobieństwo zmian jasności i kształtu krzywych blasku pomiędzy Cefeidami a "krótkookresowymi Cefeidami" [Shapley \(1914\)](#) przyjął, że mechanizm zmian jasności musi być podobny dla obu grup oraz że najprawdopodobniej są one związane z pulsacjami gwiazd pojedynczych. To wyjaśnienie również nie było wolne od problemów. Mianowicie, niejasne było w jaki sposób owe pulsacje są napędzane. [Eddington \(1919\)](#) zaproponował mechanizm zaworu (ang. *Eddington valve*), który napędza pulsacje i powoduje, że są one relatywnie stabilne przez długi okres czasu. Mechanizm ten miał być związany ze strefą w gwieździe, w której rośnie nieprzezroczystość podczas kontrakcji. Wzrost nieprzezroczystości powoduje gromadzenie się energii, dzięki czemu pulsacje mogą być wzbudzone i utrzymane. Zauważył on także, że obserwowane relacje pomiędzy okresami, jasnościami i typami widmowymi Cefeid wskazują na to, że pulsacje dotyczą gwiazd znajdujących się na ściśle określonym etapie ewolucji, a także, że są związane z warunkami w otocze gwiazdy. [Zhevakin \(1963\)](#) uszczegółowił zaproponowany mechanizm zaworu. Zauważył, że podczas fazy kurczenia się gwiazdy nieprzezroczystość rośnie w strefie drugiej jonizacji helu.

Równocześnie z dyskusjami na temat natury tych obiektów, odkrywano coraz więcej Cefeid. [Leavitt \(1908\)](#) odkryła 1777 nowych zmiennych tego typu w Obłokach Magellana. Zauważyła przy tym, że jaśniejsze gwiazdy mają dłuższe okresy zmienności. Wraz z odkryciem nowych Cefeid w Małym Obłoku Magellana, zależność między okresem a jasnością została potwierdzona ([Leavitt i Pickering 1912](#)). Było to odkrycie bardzo istotnej dla współczesnej astrofizyki zależności okres – jasność. Obecnie znamy tysiące Cefeid oraz gwiazd RR Lutni. W samych Obłokach Magellana w ramach przeglądu OGLE (*The Optical Gravitational Lensing Experiment*, [Udalski i in. 2015a](#)) sklasyfikowano 9 650 gwiazd jako Cefeidy klasyczne oraz 47 828 gwiazd jako gwiazdy RR Lutni ([Soszyński i in. 2019a](#)).

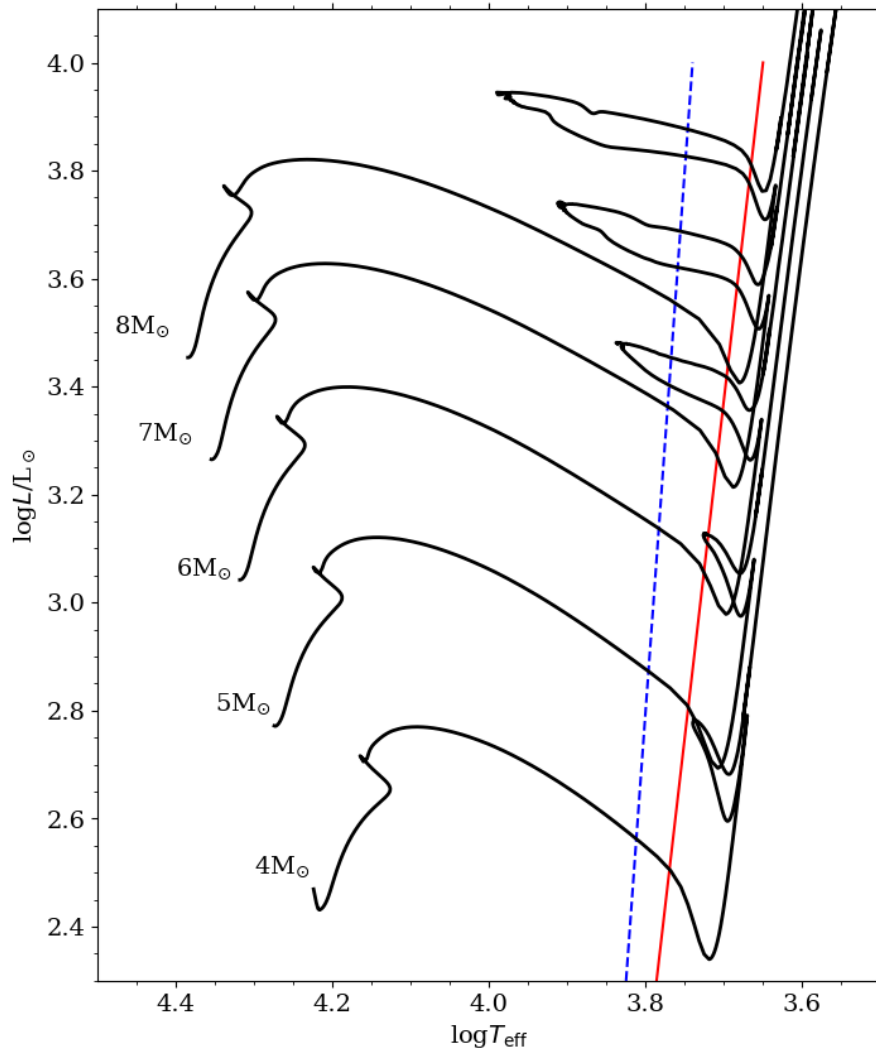
Gwiazdy RR Lutni to małomasywne i niskometaliczne gwiazdy II populacji. Ich masy wynoszą  $0.6 - 0.8 M_{\odot}$ . Gwiazdy RR Lutni na diagramie HR znajdują się na przecięciu gałęzi horyzontalnej z klasycznym pasem niestabilności (patrz Rys. 1.7). Progenitory gwiazd RR Lutni to gwiazdy o masach poniżej  $2 M_{\odot}$ . Tak małomasywne gwiazdy, podczas kontrakcji po ciągu głównym nie osiągną temperatury w jądrze potrzebnej do rozpoczęcia spalania helu w reakcji  $3\alpha$ . Kurczące się jądro staje się zdegenerowane. Dalszy wzrost temperatury jest możliwy ze względu na otoczkę nad jądrem, w której dalej zachodzi przemiana wodoru w hel. Zapalenie helu następuje w warunkach zdegenerowanych i występuje tzw. błysk helowy. Błysk helowy zachodzi, gdy masa jądra wzrośnie do około  $0.5 M_{\odot}$  niezależnie od masy gwiazdy. Uwolniona energia powoduje zniesienie degeneracji, ekspansję jądra i kontrakcję otoczki, a gwiazda osiada na gałęzi horyzontalnej wieku zerowego (ZAHB, *Zero Age Horizontal Branch*) i jest w fazie palenia helu w jądrze. Masa jądra gwiazd na gałęzi horyzontalnej jest bardzo podobna, natomiast masa wodorowej otoczki determinuje pozycję gwiazdy w ramach gałęzi horyzontalnej. Pewien zakres gałęzi horyzontalnej znajduje się na przecięciu z klasycznym pasem niestabilności, gdzie znajdują się gwiazdy RR Lutni. Ścieżki ewolucyjne gwiazd odpowiadające gwiazdom RR Lutni są przedstawione na Rys. 1.10 dla trzech wartości metaliczności. Przedstawiono także pozycję pasa niestabilności dla gwiazd RR Lutni oraz pozycję ZAHB dla trzech wartości metaliczności. Gwiazdy RR Lutni pulsują najczęściej w jednym lub dwóch modach radialnych o okresach od 0.3 do 1 dnia. Gwiazdy RR Lutni pulsujące w modzie fundamentalnym nazywa się RRab,



Rysunek 1.10: Ścieżki ewolucyjne dla gwiazd o metalicznościach  $[Fe/H] = -2.2$  i masach  $0.74 M_{\odot}$ ,  $0.76 M_{\odot}$ ,  $0.78 M_{\odot}$ ; o metalicznościach  $[Fe/H] = -1.2$  i masach  $0.64 M_{\odot}$ ,  $0.66 M_{\odot}$ ,  $0.68 M_{\odot}$ ; oraz o metalicznościach  $[Fe/H] = -0.2$  i masach  $0.54 M_{\odot}$ ,  $0.56 M_{\odot}$ ,  $0.58 M_{\odot}$  pochodzące z bazy danych BaSTI (Hidalgo i in. 2018). Niebieska oraz czerwona granica pasa niestabilności dla gwiazd RR Lutni pochodzi z Marconi i in. (2015).

natomiast te pulsujące w pierwszym owertonie RRc. Wśród klasycznych gwiazd pulsujących znane są takie obiekty, które pulsują w dwóch modach jednocześnie. Gwiazdy RR Lutni, które pulsują jednocześnie w modzie fundamentalnym i pierwszym owertonie nazywane są RRd. Dla gwiazd RR Lutni istnieje również zależność okres – jasność widoczna w podczerwonych filtrach. W filtrach optycznych nachylenie zależności okres – jasność jest znikome (patrz np. Madore i in. 2013).

Cefeidy klasyczne to wysokometaliczne gwiazdy I populacji o masach od  $3 - 4 M_{\odot}$  do kilkunastu mas Słońca. Tak masywne gwiazdy nie tworzą zdegenerowanego jądra podczas ewolucji po ciągu głównym, więc zapalenie helu w jądrze przebiega bez błysku helowego. Po zapaleniu helu gwiazdy te przemieszczają się na diagramie HR ku wyższym temperaturom ze względu na kontrakcję otoczki. Podczas palenia helu wykonują tzw. niebieską pętlę na diagramie HR. Podczas wykonywania niebieskiej pętli mogą przeciąć klasyczny pas niestabilności i pulsować jako Cefeidy klasyczne. Ścieżki ewolucyjne dla gwiazd o masach od  $4 M_{\odot}$  do  $8 M_{\odot}$  zostały przedsta-



Rysunek 1.11: Ścieżki ewolucyjne dla gwiazd o masach  $4M_{\odot}$ ,  $5M_{\odot}$ ,  $6M_{\odot}$ ,  $7M_{\odot}$  oraz  $8M_{\odot}$  pochodzące z bazy danych BaSTI (Hidalgo i in. 2018). Niebieska oraz czerwona granica pasa niestabilności dla Cefeid pochodzi z De Somma i in. (2020).

wione na diagramie HR na Rys. 1.11 wraz z teoretycznie przewidzianymi granicami klasycznego pasa niestabilności. Zasięg pętli na diagramie HR jest zależny od masy i metaliczności, zatem nie wszystkie gwiazdy przetną pas niestabilności i będą pulsować jako Cefeidy. Typowa wartość minimalnej masy pozwalającej na przecięcie ścieżki niestabilności podczas niebieskich pętli wynosi około  $4 M_{\odot}$ , jednak zależy od przyjętych parametrów modelu ewolucyjnego. Pierwsze przecięcie ścieżki niestabilności podczas ewolucji tych gwiazd następuje jednak wcześniej, w momencie kiedy gwiazda ewoluje od ciągu głównego w kierunku gałęzi czerwonych olbrzymów przez przerwę Hertzsprunga. Ta faza ewolucji jest znacznie krótsza, a zatem spodziewamy się, że większość obserwowanych Cefeid jest na etapie palenia helu w jądrze. Cefeidy klasyczne są gwiazdami I populacji, zatem mają relatywnie wysokie metaliczności. Cefeidy klasyczne także pulsują najczęściej w jednym, dwóch, a rzadziej w trzech modach radialnych. Ich okresy są dłuższe od okresów gwiazd RR Lutni i wynoszą od 1 do  $\sim 100$  dni.

Fakt, że dla Cefeid i gwiazd RR Lutni istnieje zależność okres – jasność, ma szczególnie istotne zastosowanie w astrofizyce, ponieważ pozwala na wyznaczanie odległości i badanie struktury Galaktyki oraz pobliskich galaktyk. Cefeidy i gwiazdy RR Lutni, jako obiekty różnych popula-

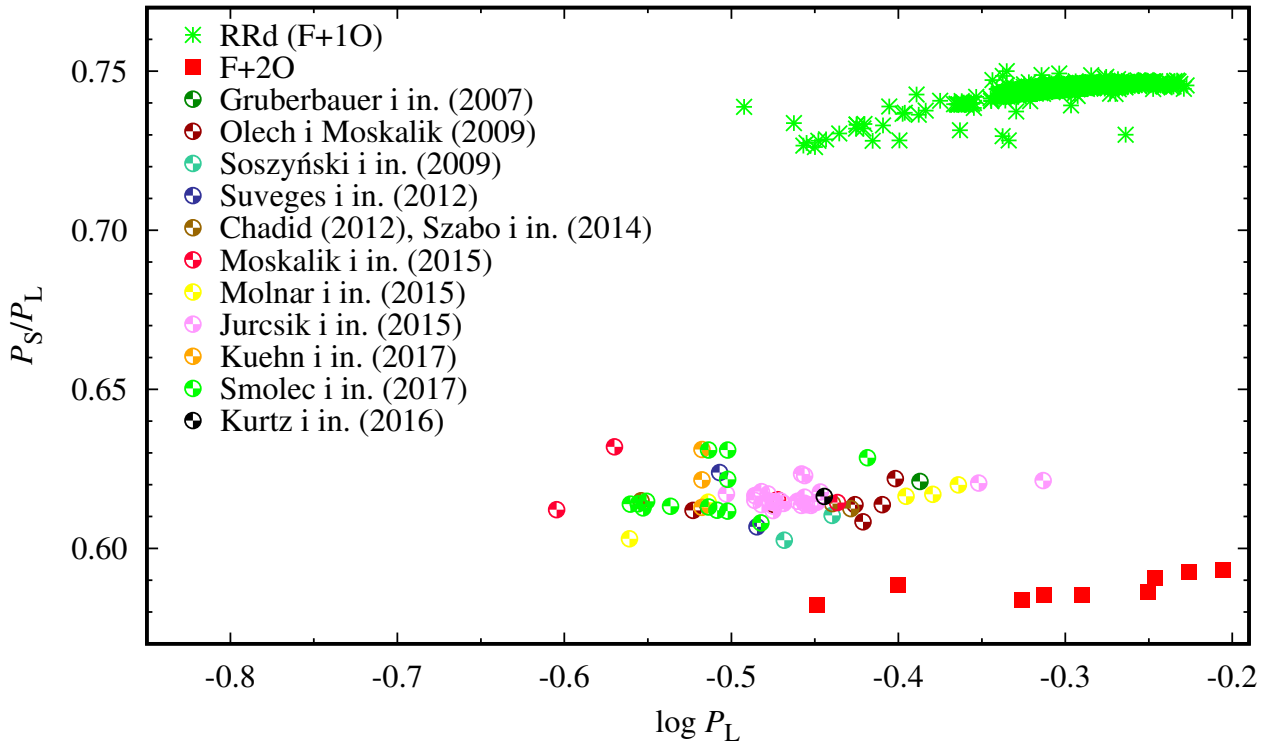
cji, są znajdowane w różnych strukturach Galaktyki. Cefeidy klasyczne jako gwiazdy I populacji są najczęściej znajdowane w dysku, natomiast gwiazdy RR Lutni jako stare i małowymiarowe gwiazdy są znajdowane najczęściej w halo i gromadach kulistych. Cefeidy klasyczne i gwiazdy RR Lutni są tzw. świecami standardowymi i są ważnym szczeblem w drabinie odległości. Szczególnie warte wspomnienia jest zastosowanie Cefeid do wyznaczenia odległości przez [Hubble \(1929\)](#) do galaktyk w Grupie Lokalnej, gdzie zauważono zależność pomiędzy prędkością ucieczki a odległością. Zależność ta nazywana jest obecnie prawem Hubble’a-Lemaitre’a ([Hubble 1929](#); [Lemaître 1927](#)). W celu określenia wartości stałej Hubble’a także wykorzystuje się Cefeidy będące istotnym szczeblem w drabinie odległości ([Riess i in. 2021](#)). Dzięki zależności okres – jasność wyznaczono odległość do Wielkiego Obłoku Magellana za pomocą Cefeid (np. [Gieren i in. 2005](#); [Storm i in. 2011](#)) oraz niezależnie za pomocą gwiazd RR Lutni (np. [Szewczyk i in. 2008](#); [Clementini i in. 2003](#)). Dzięki zależności okres – jasność dla gwiazd RR Lutni wyznaczono też odległość do Małego Obłoku Magellana ([Szewczyk i in. 2009](#)), a także dla, między innymi, galaktyk karłowatych Fornax i Sculptor ([Karczmarek i in. 2017](#); [Pietrzyński i in. 2008](#)). Zarówno Cefeidy jak i gwiazdy RR Lutni zostały wykorzystane do stworzenia trójwymiarowej mapy Obłoków Magellana ([Jacyszyn-Dobrzeńska i in. 2016, 2017](#); [Muraveva i in. 2018](#); [Haschke i in. 2012b,a](#)). Także struktura dysku Galaktyki została zbadana w trzech wymiarach dzięki wykorzystaniu Cefeid ([Skowron i in. 2019](#)).

W części gwiazd RR Lutni obserwuje się kwaziokresową modulację amplitudy i/lub fazy pulsacji. Odkrycia z ostatnich lat pokazały także, że podobna modulacja może być obecna w Cefeidach klasycznych. Efekt ten jest nazywany efektem Błażki ([Błażko 1907](#)). Jest on obserwowany w prawie połowie gwiazd RRab (47% na podstawie danych dla gromady M3 oraz 48% na podstawie satelity *Kepler*; [Jurcsik i in. 2017](#); [Benkő i in. 2010](#)). Efekt Błażki znacznie rzadziej występuje w gwiazdach RRc (5.6% na podstawie danych OGLE dla zgrubienia centralnego Galaktyki, [Netzel i in. 2018](#)). Efekt ten obserwuje się też w dwumodalnych gwiazdach RRd, które mają równocześnie nietypowe stosunki okresów (anomalne gwiazdy RRd, [Soszyński i in. 2016](#)). W ostatnich latach odkryto także, że pulsacje Cefeid klasycznych również mogą być modulowane. [Moskalik i Kołaczkowski \(2009\)](#) zauważyli długookresową modulację w Cefeidach dwumodalnych pulsujących jednocześnie w pierwszym i drugim owertonie. [Soszyński i in. \(2015\)](#) zauważyli modulację w jednomodalnych Cefeidach pulsujących w pierwszym owertonie, a [Smolec \(2017\)](#) w Cefeidach pulsujących w modzie fundamentalnym.

### 1.3.1 Pulsacje wielomodalne i dodatkowe mody w gwiazdach RR Lutni i Cefeidach

Szerokie zastosowanie Cefeid oraz gwiazd RR Lutni w astrofizyce jest niezaprzeczalne. Natomiast, z punktu widzenia badań asterosejsmicznych, za wyjątkiem pracy [Moskalik i Dziembowski \(2005\)](#) dotyczącej modelowania trójmodalnych Cefeid, nie były one do tej pory przedmiotem zainteresowania. Powodem jest rzadkie występowanie gwiazd trójmodalnych, a dopiero takie zaczynają być interesującymi celami modelowania asterosejsmicznego. Przykładowo, w Obłokach Magellana spośród ponad dziewięciu tysięcy Cefeid, jedynie 8 z nich pulsuje w trzech modach radialnych jednocześnie, natomiast spośród ponad 40 tysięcy gwiazd RR Lutni, żadna nie została sklasyfikowana jako gwiazda trójmodalna ([Soszyński i in. 2017](#)). Dla większości Cefeid i gwiazd RR Lutni pulsujących w jednym bądź dwóch modach jednocześnie, w zasadzie nie ma asterosejsmicznych ograniczeń na parametry fizyczne.

[Moskalik i Dziembowski \(2005\)](#) wykorzystali dwie Cefeidy pulsujące w trzech pierwszych modach owertonowych w celu oszacowania parametrów tych gwiazd wykorzystując do tego modele sejsmiczne i ewolucyjne. Poprzez dopasowanie obserwowanych okresów pulsacji do przewidywań



Rysunek 1.12: Diagram Petersena dla gwiazd RR Lutni. Za pomocą zielonych gwiazdek zaznaczono gwiazdy RRd, czyli pulsujące w modzie fundamentalnym i pierwszym owertonie. Za pomocą czerwonych kwadratów zaznaczono gwiazdy pulsujące w modzie fundamentalnym oraz drugim owertonie. Gwiazdy z dodatkowymi okresowościami, tworzące grupę  $RR_{0.61}$  zaznaczono różnokolorowymi symbolami, a źródło opisano w legendzie.

teoretycznych określili obfitość metali,  $Z$ , a także zawartość wodoru,  $X$ , w otoczce. Ponadto obserwowane okresy udało się poprawnie odtworzyć jedynie dla modeli znajdujących się na pierwszym przecięciu ścieżki niestabilności.

Pierwsza wzmianka w literaturze o detekcji modów nieradialnych w gwiazdach RR Lutni pojawiła się w pracy [Olech i in. \(1999\)](#) dla gwiazd z gromady M55, a następnie w pracy [Olech i in. \(2001\)](#) dla gwiazd z gromady NGC 6362. W pracy [Van Hoolst i in. \(1998\)](#) teoretycznie sprawdzono możliwość wzbudzenia modów nieradialnych w modelu gwiazdy RR Lutni i pokazano, że niektóre mody nieradialne mogłyby być wzbudzone w tych gwiazdach. Jak przedyskutowano między innymi w pracy [Smolec i in. \(2017\)](#), sygnały znajdowane w pobliżu modów radialnych mogą być również spowodowane efektem Błażki.

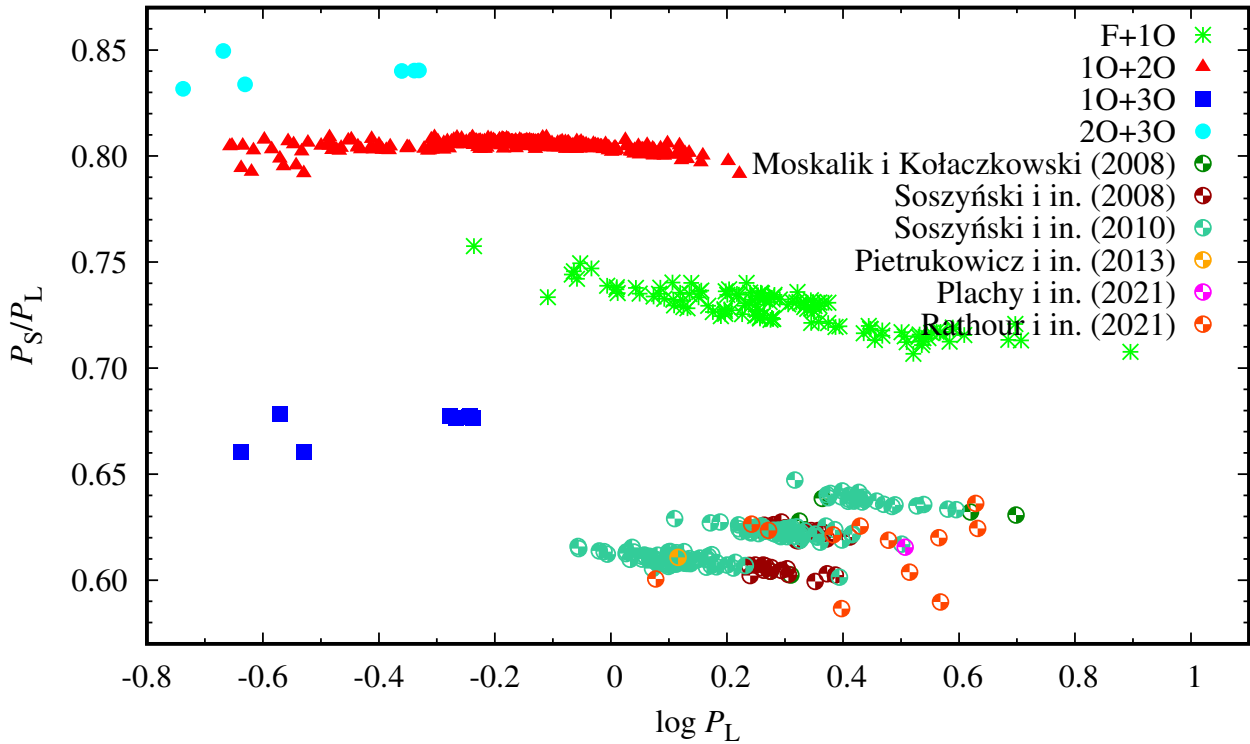
W ostatnich latach jednak, pole badań nad Cefeidami klasycznymi i gwiazdami RR Lutni przeszło rewolucję, dzięki której można zastosować metody asterosejsmologii do badania tych gwiazd. Dzięki kolejnym misjom kosmicznym, a także naziemnym przeglądom nieba, zaczęto odkrywać dodatkowe okresowości w tych gwiazdach i odkryto nową grupę wielomodalnych gwiazd pulsujących. W widmach częstości gwiazd, w których dominującym modem jest mod pierwszy owertonowy, odkryto dodatkowe sygnały tworzące stosunek okresów z pierwszym owertonem wynoszący 0.60 – 0.65. Po raz pierwszy, dodatkowy sygnał został zauważony w dwumodalnej gwiazdce RRd, AQ Leo, na podstawie danych MOST ([Gruberbauer i in. 2007](#)). Poza dwoma podstawowymi modami radialnymi, ich harmonikami oraz kombinacjami, zauważono dodatkowy sygnał oraz jego harmonikę i kombinacje dodatkowego sygnału z modami radialnymi. Harmonika dodatkowego sygnału ma okres krótszy od okresu pierwszego owertonu i tworzy



stosunek okresów z pierwszym owertonem wynoszący 0.621. Następnie, w sześciu gwiazdach RRc z gromady kulistej  $\omega$  Centauri wykryto dodatkowe sygnały o krótszych okresach, tworzące stosunek okresów  $\sim 0.61$  z okresem pierwszego owertonu (Olech i Moskalik 2009). W dwóch gwiazdach RRc na podstawie danych OGLE-III także odkryto dodatkowe sygnały ze stosunkiem okresów  $\sim 0.61$  (Soszyński i in. 2009). Trzy takie gwiazdy RRc znaleziono w danych SDSS (Süveges i in. 2012). Na podstawie danych z satelity CoRoT, Chadid (2012) odkryła ten sam sygnał w gwiazdzie RRd, a Szabó i in. (2014) w dwóch gwiazdach RRc. W oryginalnym polu satelity *Kepler* znajdują się 4 gwiazdy RRc, dla których dane fotometryczne zostały przeanalizowane przez Moskalik i in. (2015). We wszystkich czterech gwiazdach dodatkowy sygnał tworzący ten charakterystyczny stosunek okresów był obecny. Co więcej, widoczne są jego subharmoniki, tzn. sygnały o częstościach  $1/2f_x$  oraz  $3/2f_x$ , gdzie  $f_x$  jest częstością dodatkowego sygnału. Molnár i in. (2015) przeanalizowali 33 gwiazdy RR Lutni z danych z misji K2, wśród których znajdowały się dwie gwiazdy RRd oraz 4 RRc. Wszystkie te gwiazdy, poza jedną gwiazdą RRc, również mają obecny dodatkowy sygnał, a także jego subharmoniki. Jedyna gwiazda RRc, w której go nie wykryto, wykazuje efekt Błażki. Kurtz i in. (2016) korzystając z danych misji K2 znaleźli jedną gwiazdę RRd z dodatkowym sygnałem, natomiast Kuehn i in. (2017) również wykorzystując dane K2 dla gromady M4 zauważyli kolejną gwiazdę RRc z dodatkową okresowością. Już na tym etapie gwiazdy te stanowiły wyraźnie wyodrębnioną grupę na diagramie Petersena, nazywaną grupą  $RR_{0.61}$  w dalszej części rozprawy. Grupa tych gwiazd jest przedstawiona na Rys. 1.12. We wszystkich gwiazdach  $RR_{0.61}$  obecny jest radialny pierwszy owerton, a dodatkowy sygnał ma okres od niego krótszy i niższą amplitudę. Wiadomo jednak, że dodatkowy sygnał nie może odpowiadać żadnemu z modów radialnych, ponieważ stosunki okresów gwiazd  $RR_{0.61}$  mają wartości pomiędzy teoretycznie przewidzianymi stosunkami okresów odpowiadającym pulsacjom z trzecim lub czwartym owertonem (rys. 16 w pracy Moskalik i in. 2015).

Równocześnie, analogiczne sygnały były znajdowane w Cefeidach klasycznych, w których modem pulsacji jest radialny pierwszy owerton (będą one nazywane odtąd  $Cep_{0.61}$ ). Po raz pierwszy dodatkowy sygnał tworzący stosunek okresów  $\sim 0.61$  został znaleziony w 7 Cefeidach klasycznych z Wielkiego Obłoku Magellana (Moskalik i Kołaczkowski 2008). Następnie, również w Wielkim Obłoku Magellana, Soszyński i in. (2008) znaleźli 29 gwiazd  $Cep_{0.61}$  i po raz pierwszy zauważyli, że tworzą one dwa odrębne ciągi na diagramie Petersena. Jeden ciąg odpowiadał stosunkom okresów 0.60 – 0.61 i należało do niego 15 gwiazd  $Cep_{0.61}$ , a drugi ciąg o stosunkach okresów 0.62 – 0.63 zawierał 14 gwiazd  $Cep_{0.61}$ . W danych fotometrycznych dla Małego Obłoku Magellana znaleziono 139 gwiazd  $Cep_{0.61}$ , które po raz pierwszy uformowały znane obecnie trzy ciągi na diagramie Petersena (Soszyński i in. 2010a). Obserwowane trzy ciągi odpowiadają stosunkom okresów  $\sim 0.61$ ,  $\sim 0.623$  oraz  $\sim 0.638$ . W dysku galaktycznym Pietrukowicz i in. (2013) znaleźli jeszcze jedną gwiazdę należącą do tej grupy, a Rathour i in. (2021) znaleźli dodatkowo 12 takich gwiazd. W gwiazdach  $Cep_{0.61}$  znajdowane są także subharmoniki dodatkowych częstości (Smolec i Śniegowska 2016). Na podstawie fotometrii z satelity TESS znaleziono jedną gwiazdę  $Cep_{0.61}$ , w której nie wykryto dodatkowego sygnału na podstawie fotometrii naziemnej (Plachy i in. 2021). Diagram Petersena dla Cefeid klasycznych przedstawiono na Rys. 1.13. Warto wspomnieć, że w pracy Plachy i in. (2021) po raz pierwszy wykryto dodatkowy sygnał, tworzący ten sam stosunek okresów, w widmie częstości Cefeidy anomalnej, XZ Cet. Cefeidy anomalne są małowielocznymi gwiazdami pulsującymi o masach około 1 – 2  $M_{\odot}$ , jednak nie będą one rozważane w niniejszej rozprawie.

Dziembowski (2012) próbował wytłumaczyć obserwowane częstości w Cefeidach klasycznych z Obłoków Magellana. Wykluczył możliwość, że dodatkowy sygnał odpowiada kolejnemu modowi radialnemu. Mody nieradialne, które mogłyby odpowiadać obserwowanym stosunkom



Rysunek 1.13: Diagram Petersena dla Cefeid klasycznych. Za pomocą zielonych gwiazdek zaznaczono gwiazdy pulsujące w modzie fundamentalnym i pierwszym owertonie. Za pomocą czerwonych trójkątów zaznaczono gwiazdy pulsujące w pierwszym oraz drugim owertonie. Za pomocą niebieskich kwadratów zaznaczono gwiazdy pulsujące w pierwszym i trzecim owertonie, a za pomocą jasnoniebieskich kółek te pulsujące w drugim i trzecim owertonie. Gwiazdy z dodatkowymi okresowościami, tworzące grupę  $Cep_{0.61}$ , zaznaczono różnokolorowymi symbolami, a źródło opisano w legendzie.

okresów to mody o stopniach  $\ell=42, 46$  oraz  $52$  odpowiednio dla ciągów  $\sim 0.61, \sim 0.623$  oraz  $\sim 0.638$ . Takie wytłumaczenie nie jest jednak pozbawione problemów. Przede wszystkim, efekt uśredniania (patrz Rys. 1.2) powoduje, że obserwowane amplitudy modów o tak wysokich stopniach są niskie. Aby uzyskać obserwowane fotometrycznie amplitudy dla modów o stopniach  $\ell=42, 46$  oraz  $52$ , konieczna byłaby właściwa amplituda pulsacji o nierealistycznie dużych wartościach.

Analiza danych OGLE-III była przełomem w analizie grupy RR Lutni z dodatkowymi modami, ponieważ pozwoliła na ukazanie pełniejszego obrazu tej grupy. Do tej pory składały się na nią pojedyncze gwiazdy znajdowane w różnych środowiskach. W pracy [Netzel i in. \(2015b\)](#) przeanalizowałam gwiazdy RRc i RRd z pól zgrubienia centralnego Galaktyki i odkryłam w 145 gwiazdach RRc oraz 2 gwiazdach RRd dodatkowy sygnał. Ze względu na tak dużą i jednorodną próbkę, po raz pierwszy zaobserwowałam, że gwiazdy te układają się na diagramie Petersena w wyraźny horyzontalny ciąg. Ponadto, po raz pierwszy pokazałam, że tworzą więcej niż jeden ciąg. Mianowicie, 137 z nich odpowiadało stosunkom okresów z zakresu  $0.605 - 0.616$ , natomiast pozostałe wyraźnie układały się w drugi ciąg o średniej wartości stosunku okresów  $0.631$ . W czterech gwiazdach z górnego ciągu znalazłam także subharmoniki dodatkowego sygnału o częstościach  $\sim 1/2 f_x$ . Również ta grupa gwiazd nie mogła być wytłumaczona za pomocą dodatkowych modów radialnych (patrz rys. 4 w pracy [Netzel i in. 2015b](#)).

Następną analizę występowania gwiazd  $RR_{0.61}$  przeprowadziłam wśród gwiazd RRc i RRd z

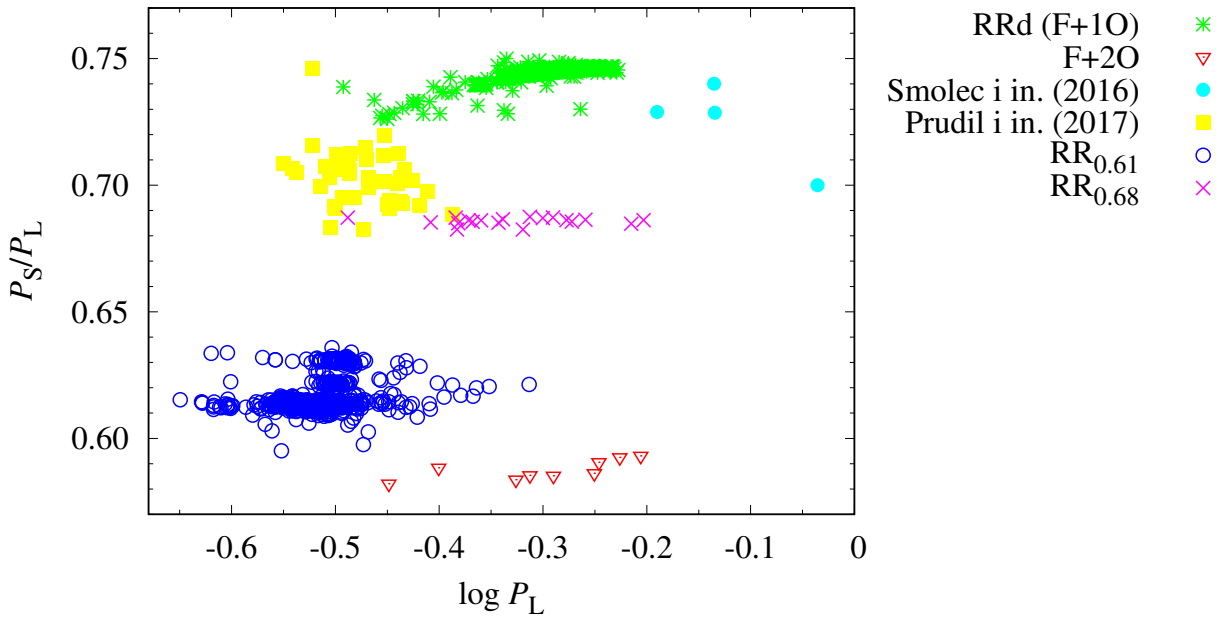
dwóch najczęściej obserwowanych pól zgrubienia centralnego Galaktyki (Netzel i in. 2015c) na podstawie danych OGLE-IV (Soszyński i in. 2014; Udalski i in. 2015b). Poziom szumu w widmie częstości skaluje się z liczbą danych wejściowych jak  $N^{-1/2}$ , gdzie  $N$  to liczba obserwacji. Im niższy poziom szumu w widmie częstości, tym niższy próg detekcji, a co za tym idzie możliwa jest detekcja w widmie częstości dodatkowych sygnałów o niższych amplitudach. Wynikiem analizy wybranej próbki było odkrycie 131 gwiazd  $RR_{0.61}$  wśród 485 gwiazd RRc, co odpowiada częstości występowania wynoszącej 27%. Istotnym odkryciem przedstawionym w pracy Netzel i in. (2015c) było zauważenie po raz pierwszy trzeciego ciągu formowanego przez gwiazdy  $RR_{0.61}$ . Pomędzy ciągiem o średnim stosunku okresów 0.613, a ciągiem o średnim stosunku okresów 0.631, pojawił się trzeci ciąg o stosunku okresów wynoszącym 0.623. Co więcej, w 20 gwiazdach  $RR_{0.61}$  pojawiły się 2 lub 3 dodatkowe sygnały, dzięki czemu te gwiazdy należały do 2 lub 3 ciągów jednocześnie. W sześciu gwiazdach z powyższej próbki znalazłam 3 sygnały odpowiadające trzem ciągom na diagramie Petersena. W 26 gwiazdach znalazłam także subharmoniki o częstościach  $1/2f_x$ , a w dwóch subharmoniki o częstościach  $3/2f_x$ . Praca ta była istotnym czynnikiem, który umożliwił zaproponowanie hipotezy tłumaczącej obserwowane sygnały.

Dzięki znacznemu wzrostowi liczby znanych gwiazd  $RR_{0.61}$  oraz detekcji subharmonik dodatkowego sygnału, Dziembowski (2016) zaproponował kolejne wyjaśnienie natury obserwowanych sygnałów zarówno dla grupy  $RR_{0.61}$  jak i  $Cep_{0.61}$ . Zgodnie z zaproponowaną hipotezą, obserwowane sygnały, tworzące charakterystyczny stosunek okresów, 0.60 – 0.65, odpowiadają harmonikom wzbudzonych modów nieradialnych, które to mody w rzeczywistości mają częstości  $1/2f_x$ . Wówczas mody nieradialne mają stopnie  $\ell=7, 8$  i  $9$  w przypadku gwiazd  $Cep_{0.61}$  oraz  $\ell=8$  i  $9$  w przypadku gwiazd  $RR_{0.61}$ . Fakt, że obserwuje się najczęściej harmoniki tych modów wynika ze znacznie silniejszego efektu uśredniania dla modów nieradialnych niż dla ich harmonik. W zaproponowanej hipotezie, środkowy ciąg obserwowany w gwiazdach  $RR_{0.61}$  odpowiada częstościom kombinacyjnym modów nieradialnych  $f_8 + f_9$ .

Jurcsik i in. (2015) przeprowadzili naziemne obserwacje fotometryczne w trzech filtrach dla gromady M3 i znaleźli 18 gwiazd  $RR_{0.61}$  (14 RRc i 4 RRd). Obserwacje dostępne w trzech filtrach pozwoliły na przeanalizowanie położenia gwiazd  $RR_{0.61}$  na diagramach kolor – jasność oraz kolor – kolor. Dzięki temu zauważono, że gwiazdy  $RR_{0.61}$  nie występują dla najwyższych temperatur spośród obserwowanej populacji RRc i RRd. Smolec i in. (2017) na podstawie fotometrii CASE dla gromady NGC 6362 wykryli ten sygnał w 10 spośród 16 obserwowanych gwiazd RRc i na podstawie diagramu kolor – jasność potwierdzili wyniki z pracy Jurcsik i in. (2015).

Na Rys. 1.14 przedstawiono diagram Petersena z uwzględnieniem moich wyników analizy danych OGLE-III i OGLE-IV (Netzel i in. 2015b,c) dla gwiazd  $RR_{0.61}$ . Dodatkowo pokazano gwiazdy RR Lutni z dodatkowymi sygnałami nienależącymi do grupy  $RR_{0.61}$ . W pracy Netzel i in. (2015a) znaleziono nową grupę dwumodalnych gwiazd RR Lutni, w których dominującym modem pulsacji jest pierwszy owerton, a dodatkowy sygnał ma okres od niego dłuższy i tworzy stosunek okresów około 0.686 z okresem pierwszego owertonu. Po odkryciu grupy, jej liczebność wzrosła o jedną gwiazdę, analizowaną wcześniej w pracy Moskalik i in. (2015), gdyż jedna z wykrytych w niej okresowości, tworzyła identyczny stosunek okresów z pierwszym owertonem. Kolejne gwiazdy z tej grupy przedstawiłam w pracy Netzel i Smolec (2016). Grupa ta jest oznaczona jako  $RR_{0.68}$  i będzie dokładniej przedyskutowana w rozdziale 2. W pracy Prudil i in. (2017) przeanalizowano gwiazdy RRab z katalogu OGLE i znaleziono grupę gwiazd z dodatkowym sygnałem o krótszym okresie od dominującego okresu pulsacji. Oba okresy tworzą stosunek okresów z przedziału 0.68 – 0.72. W pracy Smolec i in. (2016a) znaleziono dodatkowe sygnały w czterech gwiazdach RRab o okresach krótszych od okresu modu fundamentalnego. Wszystkie te grupy gwiazd są przedstawione na Rys. 1.14.





Rysunek 1.14: Diagram Petersena dla wielomodalnych gwiazd RR Lutni. Pokazano gwiazdy pulsujące w dodatkowych modach nieradialnych znane przed badaniami zaprezentowanymi w niniejszej rozprawie.

Wyniki zaprezentowane w niniejszej rozprawie znacząco zwiększają liczbę znanych gwiazd  $RR_{0.61}$  i  $RR_{0.68}$ , pozwalając na pełną charakterystykę tych grup, i będą omówione szczegółowo w rozdziale 2. Znalezione trójmodalne gwiazdy  $RR_{0.61}$  są szczególnie istotne, ponieważ to one będą stanowiły podstawę do modelowania asterosejsmicznego w rozdziale 4.

## 1.4 Gwiazdy typu $\delta$ Scuti

Po raz pierwszy, zmienność w gwiazdzie  $\delta$  Sct, prototypie klasy, została zauważona podczas obserwacji prędkości radialnych dziewięciu układów podwójnych (Campbell i Wright 1900). Następne, dokładniejsze obserwacje spektroskopowe, pozwoliły na ustalenie okresu zmian prędkości radialnych oraz ich amplitudy. Dzięki tym obserwacjom wykluczono możliwość, że obserwowana zmienność jest związana z obecnością  $\delta$  Sct w układzie podwójnym. Eggen (1956) analizował obserwacje gwiazdy  $\rho$  Pup. Jako pierwszy zauważył, że ta gwiazda oraz  $\delta$  Sct, DQ Cep oraz CC And wykazują zmienność o podobnym charakterze i tworzą oddzielną grupę gwiazd zmiennych. Początkowo gwiazdy klasyfikowane jako członkowie tej nowej klasy gwiazd zmiennych miały wysokie amplitudy, odpowiadające pulsacjom w modach radialnych. Jak się później okazało, nie byli to typowi przedstawiciele klasy. Większość obecnie obserwowanych gwiazd  $\delta$  Scuti pulsuje w wielu modach nieradialnych o niskich amplitudach. Początkowe odkrycia gwiazd pulsujących jedynie w pojedynczych modach o wysokich amplitudach było oczywiście spowodowane efektem selekcji obserwacyjnej. Przykładowo, nawet  $\delta$  Scuti, prototyp klasy, okazała się być gwiazdą pulsującą także w modach nieradialnych o niskich amplitudach (Templeton i in. 1997).

Obecnie większość znanych gwiazd  $\delta$  Scuti to gwiazdy pulsujące w modach nieradialnych, zwykle w wielu jednocześnie. Gwiazdy  $\delta$  Scuti pulsujące w modach radialnych o wysokich amplitudach są znacznie rzadziej spotykane. W obserwacjach fotometrycznych odkrywane są najczęściej mody nieradialne o niskich stopniach i niskich rzędach radialnych, natomiast spektrosko-

powe obserwacje potwierdziły występowanie w gwiazdach  $\delta$  Scuti modów o wysokich stopniach (np. Mantegazza i in. 2012). Mody obserwowane w gwiazdach  $\delta$  Scuti to mody ciśnieniowe, chociaż tzw. hybrydy też są możliwe. Hybrydy pulsują jednocześnie w modach ciśnieniowych jak i grawitacyjnych. Taki rodzaj pulsacji hybrydowych  $\delta$  Sct/ $\gamma$  Dor został po raz pierwszy potwierdzony przez Handler (2009) na podstawie analizy wielobarwnej fotometrii.

Gwiazdy typu  $\delta$  Scuti mają masy wynoszące około  $1.5 - 2.5 M_{\odot}$ , a ich temperatury efektywne wynoszą od 6900 K do 8500 K (Aerts i in. 2010; Nemeč i in. 2017). Metaliczności gwiazd  $\delta$  Scuti są typowe dla gwiazd I populacji. Zakres mas odpowiadający gwiazdom  $\delta$  Scuti jest szczególnie interesujący pod względem badania struktury i ewolucji gwiazd, ponieważ to w tym zakresie mas następuje zmiana struktury wewnętrznej z gwiazd z jądrami promienistymi, w których wodór jest spalany głównie w cyklu p-p, do gwiazd z jądrami konwektywnymi, w których dominuje cykl CNO. Na diagramie HR gwiazdy  $\delta$  Scuti znajdują się na przecięciu klasycznego pasa niestabilności z ciągiem głównym oraz sąsiadują z gwiazdami RR Lutni, które mają wyższe jasności, z gwiazdami  $\gamma$  Doradus, które pulsują w modach grawitacyjnych oraz z gwiazdami roAp, które pulsują w modach ciśnieniowych nieradialnych i charakteryzują się nietypowym składem chemicznym (patrz Rys. 1.7). Gwiazdy  $\delta$  Scuti pulsują typowo z okresami 0.04 – 0.3 dnia (Aerts i in. 2010; Pietrukowicz i in. 2020). Sąsiadujące z nimi gwiazdy RR Lutni pulsują z okresami dłuższymi, tzn. z przedziału 0.3 – 1 dni. Gwiazdy  $\gamma$  Doradus również wykazują dłuższe okresy pulsacji (0.3 – 5 dni), a gwiazdy roAp pulsują ze znacznie krótszymi okresami tj. z przedziału 5 – 22 min (Aerts i in. 2010). Zatem okres jest dosyć dobrym kryterium odróżniającym gwiazdy  $\delta$  Scuti od sąsiadujących grup gwiazd.

Większość gwiazd typu  $\delta$  Scuti znajduje się na ciągu głównym. Znane są jednak również gwiazdy  $\delta$  Scuti, które skończyły ewolucję na ciągu głównym i ewoluują w stronę gałęzi czerwonych olbrzymów przez przerwę Herzsprunga. Obiekty te są szczególnie interesujące, ponieważ ewolucja w tym stadium odbywa się na znacznie krótszych skalach czasowych, co możemy obserwować w postaci szybkich zmian okresów (np. Niu i Xue 2021). Również gwiazdy znajdujące się w fazie ewolucji przed ciągiem głównym (*pre main sequence* – pre-MS) mogą przeciąć klasyczny pas niestabilności i wykazywać pulsacje typu  $\delta$  Scuti. Pierwszy taki obiekt został odkryty przez Breger (1972). Poszukiwanie gwiazd pre-MS  $\delta$  Scuti zaowocowało kolejnymi odkryciami tego typu obiektów (Díaz-Fraile i in. 2014). Fakt, że część z gwiazd pre-MS wykazuje pulsacje jest również wykorzystywany, aby metodami asterosejsmologii badać gwiazdy na tym etapie ewolucji (np. Zwintz i in. 2014).

Wśród gwiazd  $\delta$  Scuti wyróżniamy gwiazdy typu HADS (*High-Amplitude  $\delta$  Scuti*). Gwiazdy HADS charakteryzują się pulsacjami w modach radialnych. Mają zwykle wyższe amplitudy niż większość gwiazd  $\delta$  Scuti pulsujących w modach nieradialnych. Za granicę między standardowymi  $\delta$  Scuti a HADS przyjmuje się  $\Delta V = 0.3$  mag (Breger 2000). Gwiazdy HADS mają też typowo niższe tempa rotacji, zwykle  $v \sin i < 30$  km/s (Breger 2000; Solano i Fernley 1997). HADS pulsują typowo w jednym modzie radialnym (fundamentalnym bądź pierwszym owertonie), albo dwóch jednocześnie. Relatywnie niewiele gwiazd  $\delta$  Scuti wykazuje pulsacje w wielu modach radialnych jednocześnie. Początkowo odkrywane gwiazdy  $\delta$  Scuti były gwiazdami typu HADS, ponieważ ich wysokie amplitudy zmienności ułatwiały detekcję. Jednak obecnie wiemy, że są one relatywnie rzadkie wśród standardowych gwiazd  $\delta$  Scuti. Lee i in. (2008) oszacowali częstość występowania HADS na 0.24% wszystkich gwiazd znajdujących się w obszarze diagramu HR odpowiadającemu gwiazdom  $\delta$  Scuti.

Kolejną grupą znajdującą się w rejonie diagramu HR odpowiadającemu gwiazdom  $\delta$  Scuti to ich odpowiedniki II populacji – gwiazdy SX Phoenicis (SX Phe). Ich charakter pulsacji bardzo przypomina gwiazdy HADS. Typowo są to pulsacje o wyższych amplitudach i jednym bądź kilku modach radialnych, chociaż pulsacje nieradialne o niskich amplitudach też mogą występować

(Olech i in. 2005). Ich metaliczności oraz masy są niższe niż te typowe dla  $\delta$  Scuti (patrz np. Olech i in. 2005; Antoci i in. 2019; Daszyńska-Daszkiewicz i in. 2020a). Jako gwiazdy drugiej populacji znajdowane są najczęściej w polu Galaktyki bądź w gromadach kulistych. W gromadach są zwykle identyfikowane jako błękitni maruderzy (Olech i in. 2005). W polu Galaktyki ich identyfikacja jest możliwa na podstawie własności kinematycznych, ponieważ jako gwiazdy halo mają wyższe wartości ruchów własnych (Balona i Nemeč 2012). Sama niska metaliczność może nie być dobrym kryterium, aby wyselekcjonować gwiazdy SX Phe (Balona i Nemeč 2012), co potwierdzają badania spektroskopowe gwiazd z pola *Keplera*, na bazie których średnia metaliczność kandydatek na gwiazdy SX Phe jest bliska słonecznej (Nemeč i in. 2017).

Pomimo tego, że gwiazdy  $\delta$  Scuti są bardzo interesujące ze względu na zakres ich mas, a także na różnorodność obiektów wykazujących takie pulsacje, są one relatywnie trudne do wykorzystywania w badaniach asterosejsmicznych. Aby móc je wykorzystać, konieczna jest wcześniejsza identyfikacja obserwowanych modów pulsacji. W przypadku tak bogatych widm częstości jak w gwiazdach  $\delta$  Scuti nie jest to proste zadanie i konieczne są obserwacje w wielu filtrach, bądź obserwacje spektroskopowe. Z kolei HADS pulsujące w kilku modach radialnych pozwalają na identyfikację poszczególnych modów za pomocą przewidzianych stosunków okresów. Fakt ten został wykorzystany przeze mnie podczas selekcji gwiazd HADS pulsujących w kilku modach radialnych spośród wszystkich gwiazd  $\delta$  Scuti obserwowanych przez projekt OGLE-IV w polach zgrubienia centralnego Galaktyki (patrz rozdział 5). Wielomodalne radialnie pulsujące gwiazdy HADS zostały następnie wykorzystane do modelowania asterosejsmicznego (patrz rozdział 6).

## 1.5 Cel pracy

Celem badawczym rozprawy jest wykorzystanie metod asterosejsmologii do określenia parametrów fizycznych gwiazd z klasycznego pasa niestabilności. Tematem badań są zatem gwiazdy RR Lutni, Cefeidy klasyczne oraz gwiazdy  $\delta$  Scuti. Do tej pory gwiazdy z klasycznego pasa niestabilności nie były szeroko wykorzystywane w asterosejsmologii. Cefeidy klasyczne oraz gwiazdy RR Lutni typowo pulsują w jednym bądź dwóch modach radialnych, przez co w zasadzie nie ma asterosejsmicznych ograniczeń na parametry fizyczne tych gwiazd. Dopiero gwiazdy trójmodalne stanowią interesujące obiekty do takich badań. W ostatnich latach odkryto dodatkowe sygnały w Cefeidach klasycznych oraz gwiazdach RR Lutni, w których dominującym modem pulsacji jest radialny pierwszy owerton, a dodatkowe sygnały tworzą z nim charakterystyczny stosunek okresów, w zakresie 0.60 – 0.65. Zaproponowany w pracy Dziembowski (2016) model przewiduje, że obserwowane sygnały odpowiadają wzbudzeniu modów nieradialnych o stopniach 7, 8 i 9 w Cefeidach klasycznych oraz 8 i 9 w gwiazdach RR Lutni. Dzięki zaproponowanej identyfikacji modów, gwiazdy trójmodalne pulsujące w modach radialnych i nieradialnych, mogą zostać zbadane za pomocą modeli asterosejsmicznych. Celem rozdziału 2 jest poszukiwanie gwiazd RR Lutni z dodatkowymi modami nieradialnymi na podstawie danych fotometrycznych. Szczególnie interesujące trójmodalne gwiazdy, są tematem badań w rozdziale 4, którego celem jest modelowanie asterosejsmiczne wybranych gwiazd RR Lutni. Jest to pierwsze w literaturze modelowanie trójmodalnych gwiazd RR Lutni pulsujących jednocześnie w modach radialnych i nieradialnych. Ze względu na to, że jest ono oparte o założenie poprawności modelu z pracy Dziembowski (2016), jest też równocześnie testem hipotezy tłumaczącej naturę dodatkowych sygnałów w tych gwiazdach.

Zaproponowany przez Dziembowskiego model tłumaczący naturę dodatkowych okresowości w Cefeidach klasycznych i gwiazdach RR Lutni nie został jeszcze potwierdzony obserwacyjnie. Jednym z możliwych testów modelu jest bezpośrednia obserwacyjna identyfikacja modów z wykorzystaniem obserwacji spektroskopowych. Do tej pory, dodatkowa zmienność wykrywana w

danych fotometrycznych nie została zaobserwowana w zmianach profili linii widmowych. Nie jest to zaskakujące, ponieważ dodatkowe sygnały mają typowo niskie amplitudy w stosunku do dominujących pulsacji radialnych o wysokich amplitudach. Przed próbą spektroskopowej identyfikacji modów, konieczne jest więc sprawdzenie, czy jest możliwa ich detekcja w danych spektroskopowych. W celu określenia możliwości detekcji modów nieradialnych w Cefeidach klasycznych, przeprowadzono badania serii syntetycznych profili linii widmowych. Jest to tematyka rozdziału 3.

Gwiazdy  $\delta$  Scuti stanowią bardzo interesującą grupę obiektów. Składają się na nie gwiazdy na różnych etapach ewolucji, z różnych populacji oraz o masach pokrywających zakres mas, w którym następuje zmiana struktury wewnętrznej gwiazdy (pojawienie się konwektywnego jądra). Zdecydowana większość gwiazd  $\delta$  Scuti to gwiazdy pulsujące w wielu modach nieradialnych, których identyfikacja jest wymagająca. Z tego względu wykorzystanie gwiazd  $\delta$  Scuti w badaniach asterosejsmicznych nie jest proste. Identyfikacja modów pulsacji jest możliwa dla gwiazd HADS oraz SX Phe pulsujących w wielu modach radialnych jednocześnie na podstawie wartości stosunków okresów. Celem rozdziału 5 jest poszukiwanie gwiazd  $\delta$  Scuti, które pulsują w kilku modach radialnych, a w szczególności selekcja gwiazd co najmniej trójmodalnych, które są najbardziej interesujące w kontekście badania asterosejsmicznego. W tym celu przeprowadzono analizę danych fotometrycznych najliczniejszej znanej obecnie grupy gwiazd  $\delta$  Scuti z kolekcji projektu OGLE. Analiza asterosejsmiczna wyselekcjonowanych trójmodalnych gwiazd jest celem rozdziału 6. Do tej pory, większość asterosejsmicznych badań gwiazd  $\delta$  Scuti dotyczyła szczegółowego modelowania konkretnych gwiazd. Aby zbadać dużą liczbę obiektów, wykorzystano metodę dopasowania obserwowanych okresów, do okresów policzonych teoretycznie dla modeli z gęstej i regularnej siatki ścieżek ewolucyjnych. Kolejnym celem było więc również przetestowanie jak taka metoda sprawdza się w badaniu dużej populacji gwiazd i jakie są jej ograniczenia.

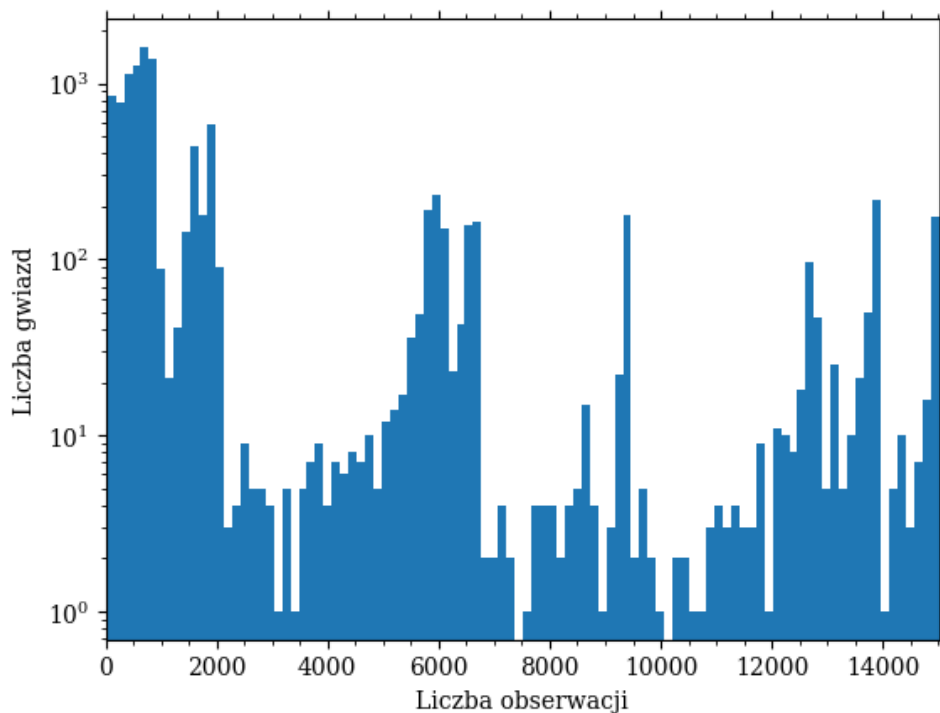
# Poszukiwanie gwiazd RR Lutni z modami nieradialnymi

W pracy [Netzel i in. \(2015b\)](#) poszukiwano gwiazd z modami nieradialnymi pośród gwiazd RRc i RRd położonych w polach zgrubienia centralnego Galaktyki na podstawie danych OGLE-III ([Soszyński i in. 2011a](#)). Natomiast w pracy [Netzel i in. \(2015c\)](#) wykorzystano dane OGLE-IV, ale jedynie dla dwóch najczęściej obserwowanych pól w zgrubieniu centralnym ([Soszyński i in. 2014](#)). W momencie analizy przeprowadzonej w pracy [Netzel i in. \(2015c\)](#), dostępne były 4 sezony obserwacyjne odpowiadające czterem latom obserwacji z przerwami związanymi z niewidocznością pól. W poniższym rozdziale przedstawione są wyniki poszukiwania gwiazd RR<sub>0.61</sub> i RR<sub>0.68</sub> na podstawie 8 sezonów obserwacyjnych OGLE-IV dla wszystkich obserwowanych pól w zgrubieniu centralnym Galaktyki. Wyniki przedstawione w poniższym rozdziale zostały opublikowane w pracy [Netzel i Smolec \(2019\)](#).

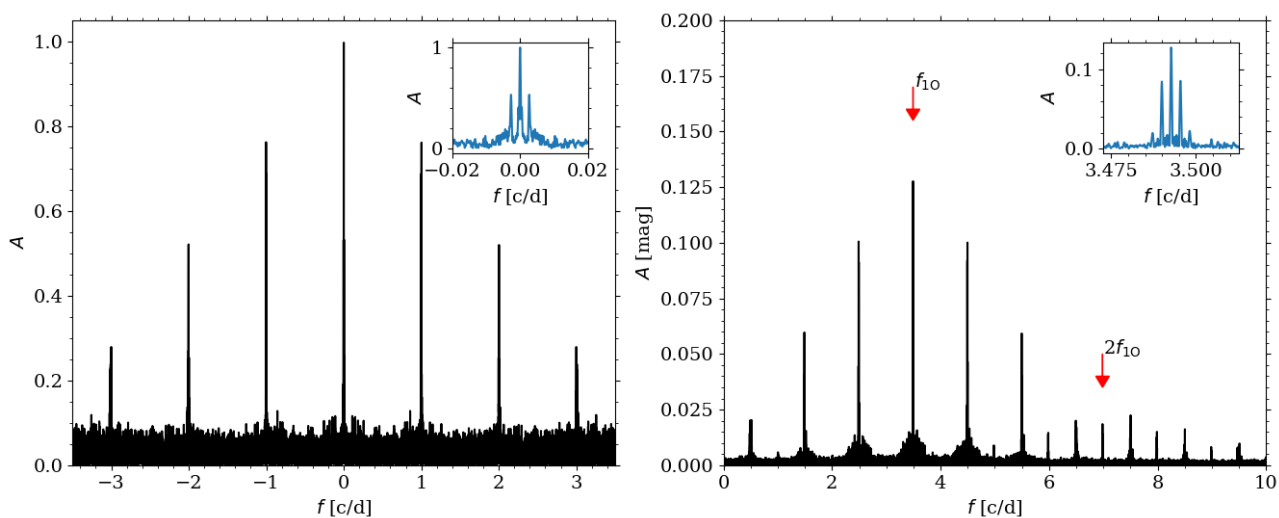
## 2.1 Metoda analizy

W celu poszukiwania nowych gwiazd z modami nieradialnymi, wykorzystałam dane z projektu OGLE ([Udalski i in. 1992](#)) dla pól zgrubienia centralnego Galaktyki. Pomimo faktu, że dane OGLE to dane naziemne, są one doskonałe do poszukiwania takich zjawisk. Projekt OGLE monitoruje regularnie miliardy gwiazd. Dzięki temu, nawet rzadkie zjawiska są znajdowane w relatywnie dużej liczbie obiektów, co umożliwia badanie tych zjawisk pod kątem statystycznym. W czwartej fazie projektu OGLE (OGLE-IV, [Udalski i in. 2015b](#)) w momencie analizy dostępnych było 8 sezonów obserwacyjnych. Tak długi okres obserwacji pozwala na śledzenie zmian częstości i amplitud modów pulsacji w czasie. Co więcej, dla części z tych gwiazd dostępne są obserwacje z poprzednich faz projektu OGLE, dzięki czemu możliwe jest uzyskanie kilkunastu lat obserwacji danego obiektu. W kolekcji OGLE-IV dla zgrubienia centralnego Galaktyki znajduje się 11 415 gwiazd RRc oraz 148 gwiazd RRd ([Soszyński i in. 2014](#)), które były przedmiotem badań w rozprawie. Obserwacje zostały zebrane w latach 2010 – 2017. Wykorzystałam jedynie obserwacje w filtrze  $I$ , ponieważ są one znacznie liczniejsze niż w filtrze  $V$ . Histogram liczby punktów obserwacyjnych dla gwiazd RRc przedstawiony jest na Rys. 2.1. Najmniejsza liczba obserwacji w próbie to 35, natomiast największa to 15 010. Liczba obserwacji jest istotna z punktu widzenia analizy częstości, ponieważ od niej zależy poziom szumu w widmie częstości. Poziom szumu skaluje się z liczbą danych wejściowych jak  $N^{-1/2}$ , gdzie  $N$  to liczba punktów obserwacyjnych.

Dane naziemne wiążą się jednak z pewnymi utrudnieniami podczas analizy częstości. Pomijając błędy obserwacyjne, obserwacje fotometryczne możemy przedstawić jako iloczyn funkcji opisującej zmiany jasności gwiazdy,  $m(t)$ , oraz dyskretnej funkcji okna,  $W(t)$ , przyjmującej



Rysunek 2.1: Histogram liczby obserwacji dla gwiazd RRc z danych OGLE-IV (lata 2010–2017).



Rysunek 2.2: Lewy panel: okno widmowe przedstawiające strukturę aliasów dobowych. Prawy panel: widmo częstości dla gwiazdy RRc OGLE-BLG-RRLYR-04754. Częstości związane ze zmiennością gwiazdy zostały zaznaczone strzałkami. Dodatkowe panele przedstawiają zbliżenie na strukturę aliasów rocznych.



wartość 1 jedynie w momencie obserwacji. Transformata Fouriera iloczynu funkcji odpowiada splotowi transformat. Transformata funkcji  $W(t)$  to tak zwane okno widmowe, które ilustruje jak regularności w próbkowaniu danych wpływają na widmo częstości gwiazdy. Na rysunku 2.2 zilustrowano okno widmowe dla typowych danych OGLE. Na lewym panelu widać strukturę odpowiadającą aliasom dobowym, wynikającą z faktu prowadzenia obserwacji w nocy. Na dodatkowym panelu przedstawiona jest struktura odpowiadająca aliasom rocznym, wynikająca z sezonowego cyklu obserwacji. Na prawym panelu przedstawiono widmo częstości dla przykładowej gwiazdy RRc, OGLE-BLG-RRLYR-04754. Z każdą częstością w widmie danych są stowarzyszone aliasy dobowe oraz roczne.

Dla części gwiazd analizowanych w rozprawie pojawiały się sygnały instrumentalne o częstościach bliskich 1 c/d lub 2 c/d. W ogólności, podczas indywidualnej analizy gwiazdy, takie sygnały są łatwe do odróżnienia od interesujących częstości, ponieważ sygnały poszukiwane w tym rozdziale odpowiadają innym zakresom częstości. W przypadku tak dużej liczby gwiazd do badań, konieczna jest analiza automatyczna. Musi ona rozróżniać czy dany sygnał jest w rzeczywistości związany ze zmiennością gwiazdy, czy też może być aliasem od sygnału instrumentalnego.

### 2.1.1 Metoda iteracyjnego odejmowania częstości

Analiza bazowała na standardowej procedurze iteracyjnego odejmowania zidentyfikowanych częstości (ang. *consecutive prewhitening*). Polega ona na iteracyjnej detekcji częstości w widmie, dopasowywaniu ich do danych, i kolejnej inspekcji widma obliczonego dla residuów z dopasowania. Widmo częstości było liczone za pomocą dyskretnej transformaty Fouriera dla nierównoodstępnych danych (Deeming 1975; Kurtz 1985) zaimplementowanej w programie FDECOMP (program udostępniony przez R. Smolca i zmodyfikowany przeze mnie w celu automatyzacji analizy). Sygnały wykryte w widmie częstości były dopasowywane do danych w postaci:

$$m(t) = A_0 + \sum_k A_k \sin(2\pi f_k t + \phi_k), \quad (2.1)$$

gdzie  $m(t)$  to zmiana jasności gwiazdy w czasie,  $A_0$  to punkt zerowy, a  $A_k$ ,  $f_k$ ,  $\phi_k$  to amplitudy, częstości i fazy sygnałów znalezionych w widmie. Do rozwiązania dodaje się jedynie częstości dobrze rozdzielone, czyli o separacji od innych sygnałów większej niż rozdzielczość transformaty Fouriera. Formalnie rozdzielczość ta jest zdefiniowana jako  $1/\Delta T$ , gdzie  $\Delta T$  to całkowita długość danych. W rozprawie, rozdzielczość transformaty została jednak przyjęta zgodnie z bardziej konserwatywnym kryterium  $2/\Delta T$ . Parametry równania 2.1 dopasowywano do danych za pomocą metody najmniejszych kwadratów. Procedura uzupełniania wyrażenia z równania 2.1 i poszukiwania kolejnych sygnałów w widmie częstości residuów jest powtarzana, dopóki znajdują się sygnały spełniające przyjęte kryterium stosunku sygnału do szumu. Kryterium decydujące o tym, że sygnał w widmie częstości jest istotny przyjęto jako  $\text{SNR}=4$ , gdzie  $\text{SNR}$  to stosunek sygnału do szumu (*signal-to-noise ratio*). Taka wartość była wykorzystywana w literaturze (patrz np. Breger i in. 1993), a także jest powszechnie stosowana podczas analizy danych OGLE (patrz np. Netzel i in. 2015b; Smolec i in. 2016a; Prudil i in. 2017). Lepszym podejściem byłoby przeprowadzenie symulacji, które, dla używanego zestawu danych, pozwoliłyby na wyznaczenie granicznej wartości  $\text{SNR}$  dla założonego prawdopodobieństwa fałszywego alarmu (ang. *false alarm probability*). Jest to prawdopodobieństwo uznania faktycznie nieistotnego sygnału za prawdziwy (patrz np. Kuschnig i in. 1997; Baran i in. 2015). W praktyce jednak takie symulacje można przeprowadzić przy upraszczających założeniach – np. rozważając tylko detekcję w widmie oryginalnych danych. Ta, dla gwiazd badanych w rozprawie, z uwagi na

wysokie amplitudy modów radialnych, jest zawsze pewna. Z punktu widzenia rozprawy istotne byłoby określenie granicznego poziomu SNR po kilku etapach iteracyjnego odejmowania częstości. Z tych względów przyjęto, podobnie jak w innych analizach danych OGLE, kryterium  $\text{SNR}=4$ .

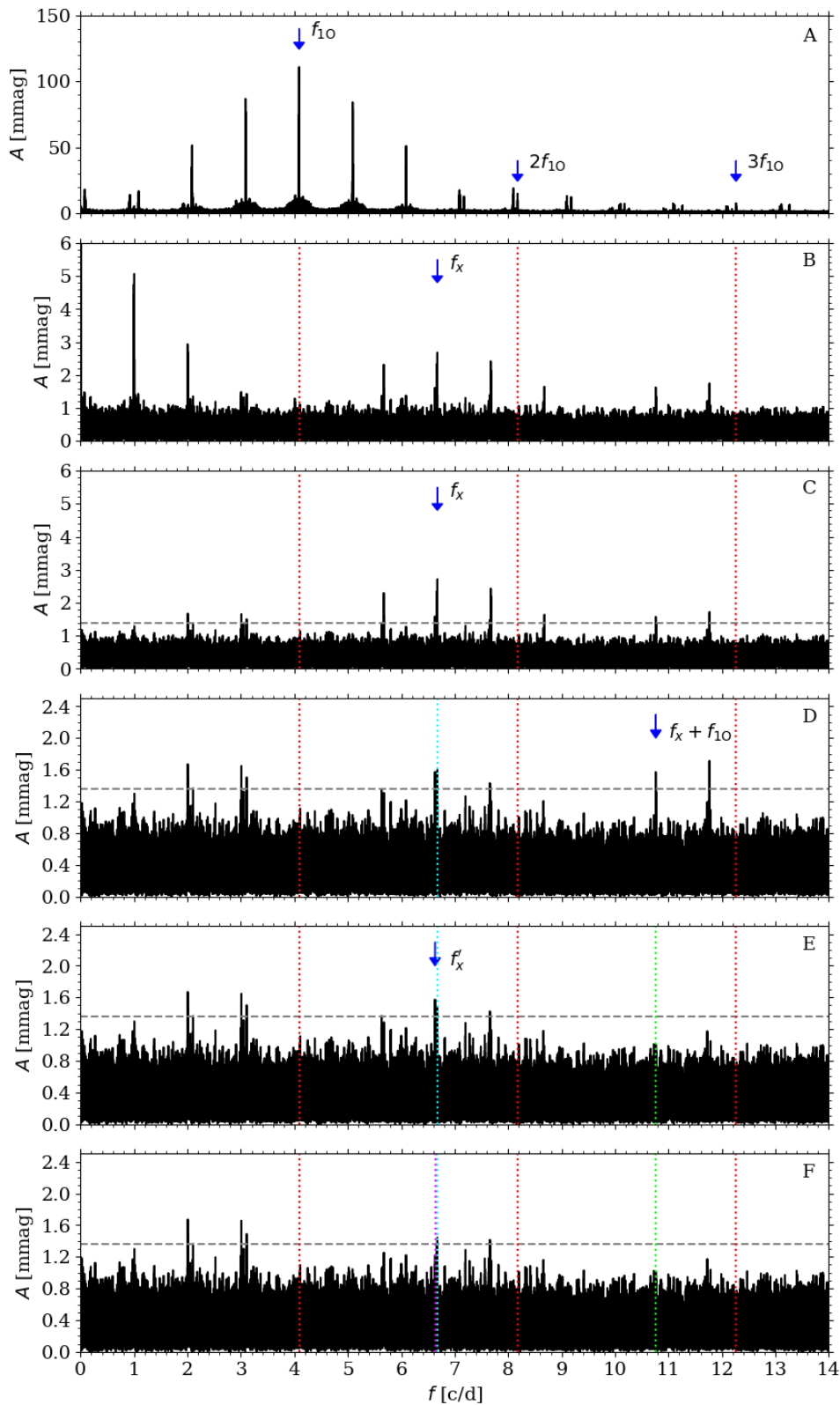
Procedura odejmowania zidentyfikowanych częstości jest przedstawiona na Rys. 2.3 na przykładzie gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-07962. Górny panel przedstawia widmo częstości oryginalnych danych, a kolejne panele przedstawiają kolejne kroki odejmowania częstości. W widmie częstości oryginalnych danych widoczny jest dominujący sygnał odpowiadający częstości pierwszego owertonu oraz struktura związana z jego aliasami dobowymi. Do rozwiązania w postaci równania 2.1 dodano częstość pierwszego owertonu razem z pięcioma harmonikami. Widmo częstości residuów znajduje się na kolejnym panelu (B). Najwyższy jest sygnał w niskich częstościach, który odpowiada trendowi w danych. Z trendem można sobie poradzić na kilka sposobów. Można go wymodelować za pomocą wielomianów, funkcji spline, bądź korzystając z techniki zależnego od czasu odejmowania częstości. Ostatnia technika będzie szczegółowo opisana w rozdziale 2.1.2. W przypadku gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-07962, w celu wizualizacji metody iteracyjnego odejmowania sygnałów, wykorzystano technikę usuwania trendu za pomocą modelowania go funkcją spline. Widmo residuów po usunięciu trendu znajduje się na kolejnym panelu, C. Widać na nim dodatkowy sygnał,  $f_x$ , odpowiadający stosunkowi okresów  $\sim 0.61$  z okresem pierwszego owertonu. Częstość dodatkowego sygnału została również dodana do rozwiązania i odjęta od danych. W kolejnym widmie residuów (panel D) najwyższy sygnał ( $\text{SNR}=4.99$ ) odpowiada częstości  $\sim 11.76$  c/d, a jego alias dobowy ( $\text{SNR}=4.67$ ) odpowiada częstości kombinacyjnej  $f_x + f_{10}$ . Stanowi to przykład sytuacji, w której alias dobowy spodziewanego sygnału ma wyższą amplitudę niż tenże sygnał. Ponieważ wystąpienie w widmie częstości sygnału odpowiadającego kombinacji liniowej już zidentyfikowanych częstości jest bardziej prawdopodobne niż sygnału o częstości  $\sim 11.76$  c/d, do rozwiązania została dodana częstość kombinacyjna. W widmie częstości residuów na panelu E pozostaje dodatkowy sygnał,  $f'_x$ , odpowiadający stosunkowi okresów z okresem pierwszego owertonu około 0.61. Jest on również rozdzielony względem sygnału  $f_x$ . Po dodaniu go do rozwiązania, widmo residuów wygląda jak na panelu F. Powyżej progu detekcji widać w dalszym ciągu sygnały bliskie  $f_x$ , ale są one nierozdzielone względem  $f_x$ , a także sygnały bliskie częstościom o wartościach całkowitych.

Na Rys. 2.4 przedstawiono zbliżenie na zakres częstości w widmie odpowiadający dodatkowemu sygnałowi dla jednej z gwiazd  $\text{RR}_{0.61}$ . W tej gwiazdzie, jak i w znacznej większości pozostałych gwiazd  $\text{RR}_{0.61}$ , obserwuje się nadwyżkę mocy (ang. *power excess*), a nie pojedynczy pik. Takiego sygnału nie usunie się całkowicie z widma poprzez dopasowanie zmienności o stałej częstości i amplitudzie. By scharakteryzować takie sygnały, jako reprezentatywną wartość częstości wybierano częstość sygnału o najwyższej amplitudzie. Odjęcie takiego sygnału z widma jest jednak możliwe przy użyciu metody odejmowania częstości zależnej od czasu opisanej w kolejnym rozdziale.

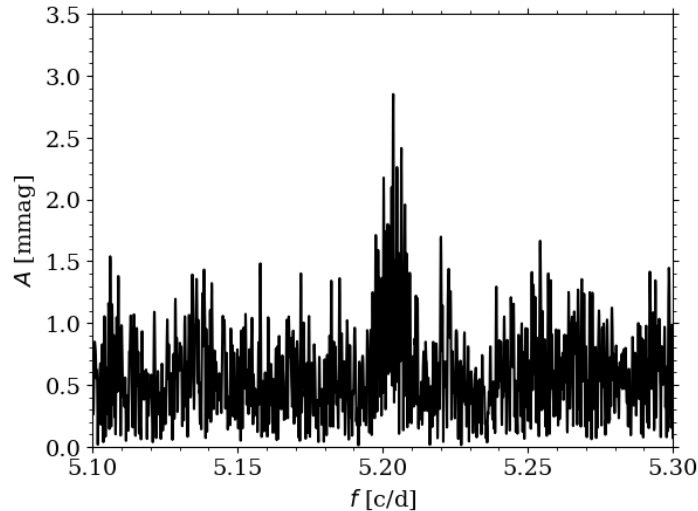
### 2.1.2 Metoda odejmowania częstości zależna od czasu

W przypadku części gwiazd, w widmie częstości pojawiają się sygnały w niskich częstościach często odpowiadające trendom w danych. Ponadto, w przypadku wielu gwiazd  $\text{RRc}$  obserwuje się, że częstości pierwszego owertonu są niestacjonarne, czyli ich amplituda i/lub częstość są zmienne w czasie. W przypadku istnienia niestacjonarnych sygnałów w widmie częstości, nie jest możliwe odjęcie sygnału z danych za pomocą pojedynczego składnika dodanego do równania 2.1, ponieważ są one poszerzone i nierozdzielone. Po próbie odjęcia niestacjonarnego sygnału, przez dopasowanie zmienności o stałej amplitudzie i częstości, w widmie częstości pozostaje nadmiar





Rysunek 2.3: Przykład iteracyjnego odejmowania zidentyfikowanych częstości dla gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-07962. Górny panel odpowiada widmu częstości oryginalnych danych, a kolejne panele następnym krokom odejmowania częstości (opisane w tekście). Czerwone przerywane linie odpowiadają pozycjom pierwszego owertonu i jego harmonik. Przerywane linie w innych kolorach odpowiadają pozycjom pozostałych usuniętych częstości zaznaczonych strzałkami. Szara przerywana linia odpowiada czterokrotności średniego poziomu szumu w widmach.

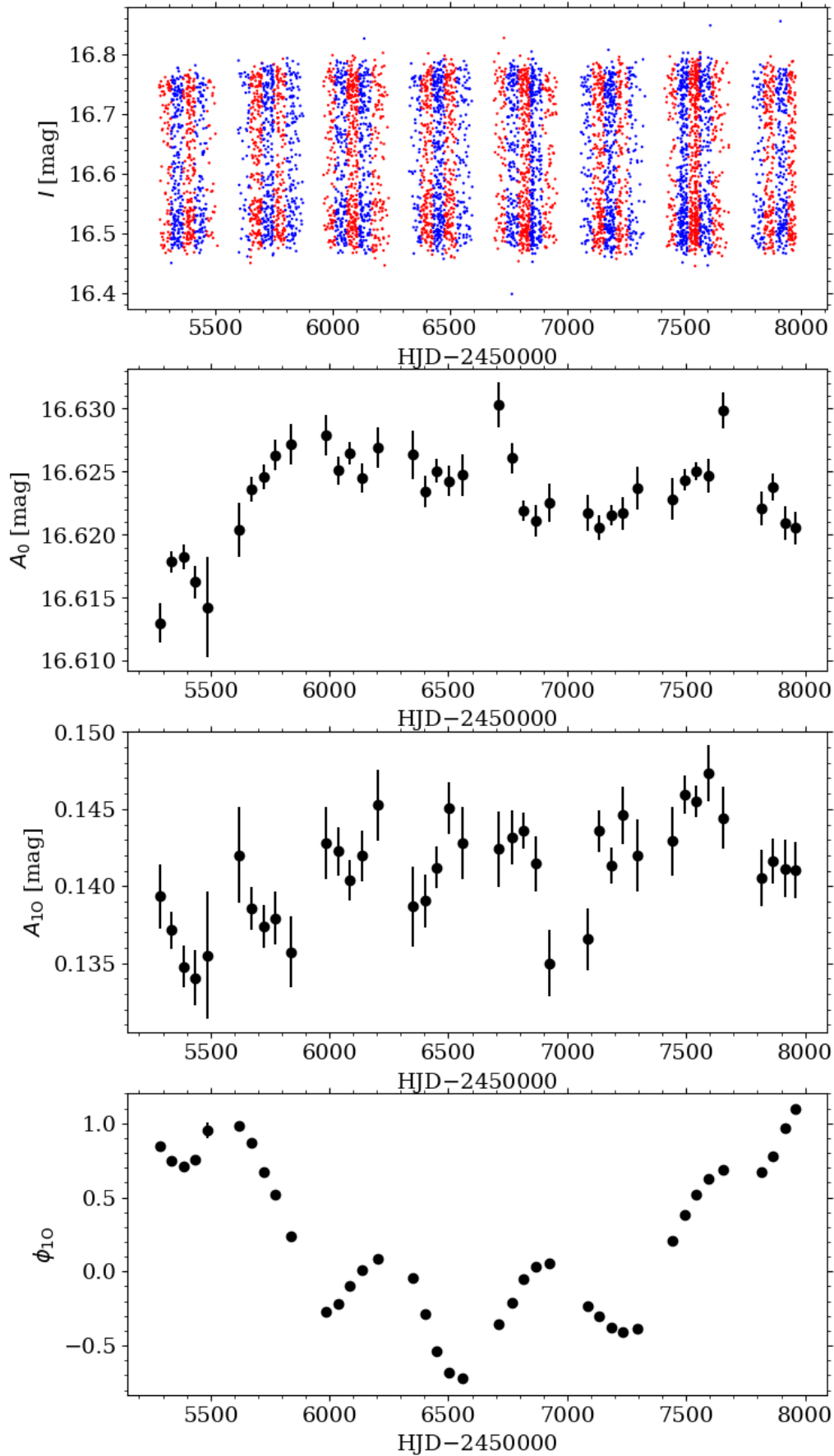


Rysunek 2.4: Fragment widma częstości gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-05970, po usunięciu pierwszego owertonu i jego harmonik, przedstawiający strukturę dodatkowego sygnału  $f_x$ .

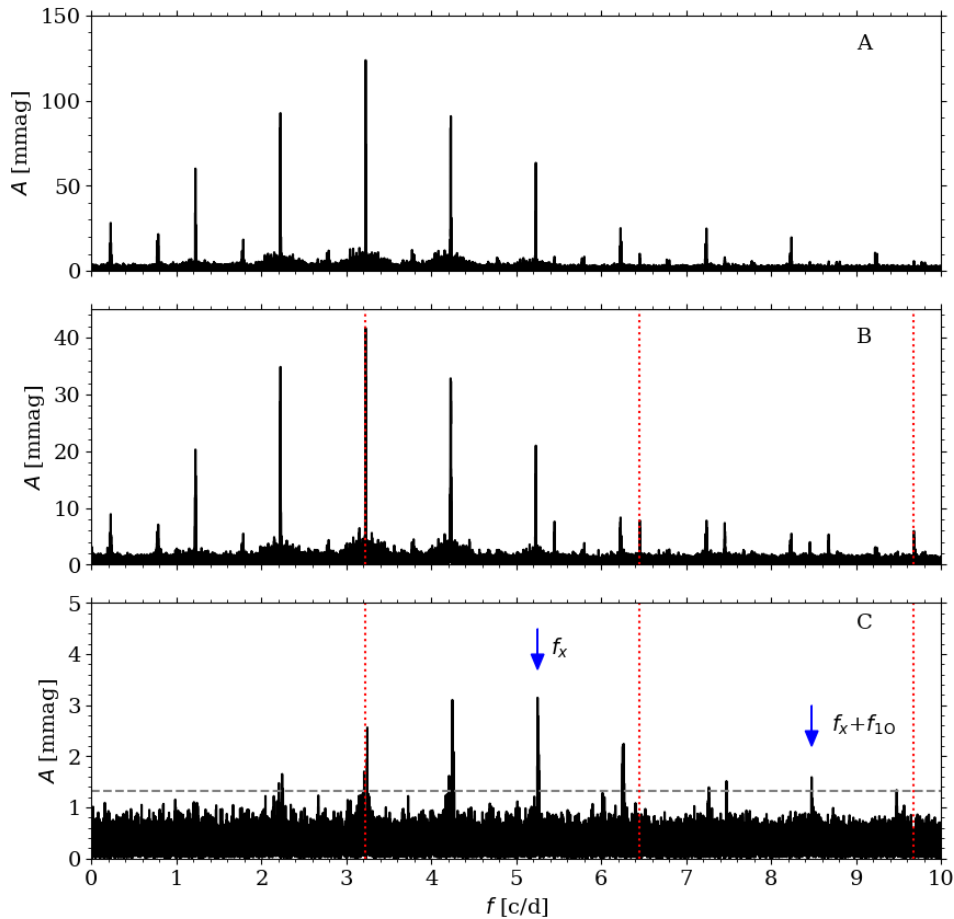
mocy w tym miejscu. Aby uniknąć powyższych problemów, zarówno trendy w danych, jak i sygnały niestacjonarne, były usuwane z widma częstości residuów przy pomocy algorytmu iteracyjnego odejmowania częstości zależnego od czasu (ang. *time-dependent prewhitening*, TDP). Algorytm ten był stosowany do danych fotometrycznych z teleskopu *Keplera* przez [Moskalik i in. \(2015\)](#) oraz przeze mnie w zmodyfikowanej wersji przystosowanej do danych naziemnych [Netzel i in. \(2015b,c\)](#). Działanie algorytmu jest przedstawione na Rys. 2.5. Algorytm ten dzieli dane czasowe na grupy (patrz górny panel Rys. 2.5). W każdej grupie równanie 2.1 jest dopasowane niezależnie, przy czym częstości  $f_k$  są ustalone jako stałe i odpowiadają częstościom otrzymanym z analizy wszystkich danych, a zmianom podlegają jedynie amplitudy i fazy,  $A_k$  oraz  $\phi_k$ , oraz wyraz zerowy  $A_0$ . Wartości wyrazu zerowego, amplitudy pierwszego owertonu oraz jego fazy w poszczególnych grupach są przedstawione na kolejnych panelach Rys. 2.5. Residua, wyliczone niezależnie dla poszczególnych grup, zostają połączone i są analizowane w kolejnym kroku procedury usuwania częstości. Niezależne dopasowanie wyrazu zerowego dla każdej z grup pozwala na usunięcie z danych trendu, natomiast zmiany częstości są odzwierciedlone w zmianach faz.

Przykład wpływu zastosowania algorytmu TDP na widma częstości jest pokazany na Rys. 2.6 dla tej samej gwiazdy co na Rys. 2.5. Na górnym panelu przedstawione jest widmo częstości oryginalnych danych, a na kolejnym panelu (B) widmo częstości po zastosowaniu standardowej procedury odejmowania sygnałów z wykorzystaniem częstości pierwszego owertonu oraz jego harmonik. W miejscu usuniętego pierwszego owertonu w dalszym ciągu widoczny jest sygnał, którego częstość nie jest rozdzielona względem częstości pierwszego owertonu. Na panelu C przedstawione jest widmo częstości po zastosowaniu TDP do oryginalnych danych wykorzystując częstość pierwszego owertonu i jego harmonik. Dodatkowy sygnał oraz jego kombinacja są widoczne.

Warto zwrócić uwagę, że aliasy dobowe na panelu C w Rys. 2.6 mają podobne amplitudy. W takich przypadkach identyfikacja, który sygnał jest tym właściwym nie jest w pełni jasna. W przypadku gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-06806, wybrałam sygnał zaznaczony jako  $f_x$ , ponieważ tworzy stosunek okresów z okresem pierwszego owertonu  $\sim 0.61$ , spodziewany dla gwiazd RR<sub>0,61</sub>, natomiast żaden inny alias nie pasuje do możliwych znanych sygnałów w gwiazdach RR Lutni. W widmie widoczna jest także kombinacja liniowa pomiędzy sygnałem  $f_x$ , a sygnałem



Rysunek 2.5: Zastosowanie techniki TDP dla gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-06806 dla ośmiu sezonów obserwacyjnych z danych OGLE-IV. Górny panel przedstawia dane podzielone na grupy. Następne panele przedstawiają zmiany punktu zerowego,  $A_0$ , amplitudy oraz fazy pierwszego owertonu. Błędy wyznaczenia fazy są typowo mniejsze od rozmiaru punktu.

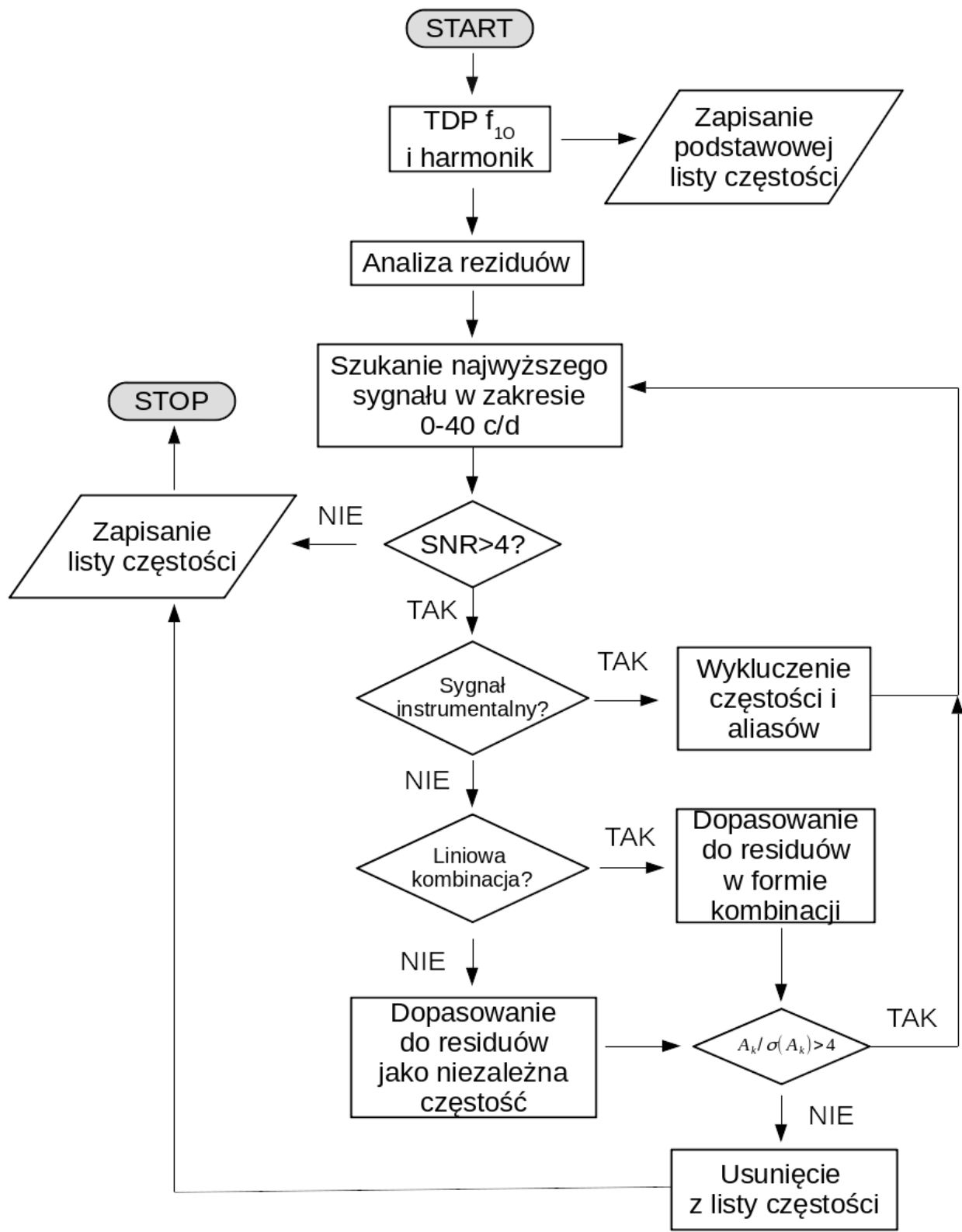


Rysunek 2.6: Przykład zastosowania techniki TDP dla gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-06806. Panel A: widmo częstości oryginalnych danych. Panel B: widmo częstości po zastosowaniu standardowego odejmowania częstości. Czerwone kropkowane linie odpowiadają pozycjom pierwszego owertonu i jego harmonik. Panel C: widmo częstości po zastosowaniu techniki TDP. Strzałki wskazują na dodatkowe częstości znalezione w widmie. Szara przerywana linia odpowiada czterokrotności średniego poziomu szumu.

odpowiadającym pierwszemu owertonowi.

### 2.1.3 Automatyczny skrypt do analizy danych fotometrycznych

Gwiazdy RRd zostały przeanalizowane indywidualnie. W przypadku gwiazd RRc, ze względu na dużą liczbę gwiazd w próbie wejściowej (11 415), konieczne było przygotowanie automatycznego skryptu, który przeprowadziłby wstępną analizę i selekcję gwiazd. Skrypt został przygotowany i przetestowany przeze mnie w ramach doktoratu. Diagram przepływu dla przygotowanego skryptu jest przedstawiony na Rys. 2.7. Częstość pierwszego owertonu oraz harmonik była usuwana z wykorzystaniem algorytmu TDP. Widmo częstości po usunięciu modu radialnego i harmonik było liczone w zakresie od 0 do 40 c/d, przy czym nie brano pod uwagę sygnałów znajdujących się w niskich częstościach, poniżej  $2/\Delta T$ , ponieważ mogą odpowiadać trendom w danych. Jeżeli najwyższy sygnał znaleziony w ustalonym zakresie częstości miał SNR niższy niż 4, analiza danej gwiazdy była zakończona. Jeżeli sygnał miał  $\text{SNR} > 4$ , skrypt sprawdzał, czy jest to sygnał niezależny lub czy może odpowiadać kombinacji liniowej częstości znalezionych wcześniej. Jeżeli sygnał był niezależny, do wyrażenia 2.1 wprowadzany był kolejny



Rysunek 2.7: Diagram przepływu dla automatycznego skryptu zastosowanego podczas analizy.

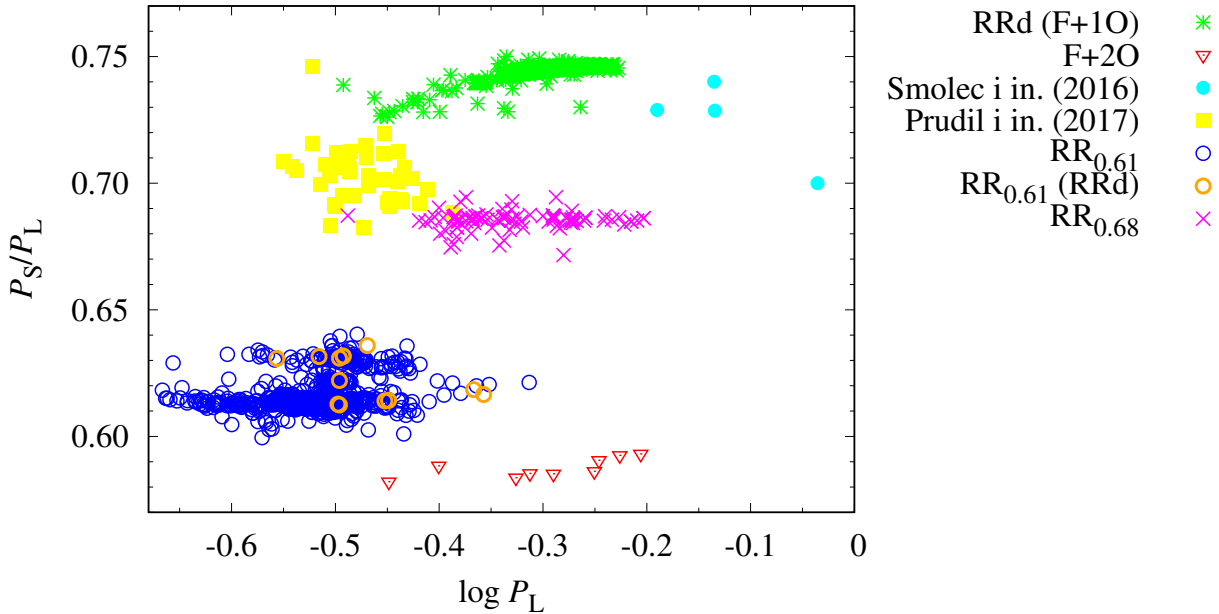
wyraz o nowej częstotliwości. W przeciwnym przypadku dodawany był wyraz z kombinacją liniową wykrytych wcześniej częstotliwości. Po dodaniu częstotliwości sygnału do równania 2.1, było ono dopasowywane do danych. Dany sygnał pozostawał uwzględniony w równaniu, jeżeli po dopasowaniu spełniał on kryterium  $A_k/\sigma(A_k) > 4$ , gdzie  $\sigma(A_k)$  to błąd wyznaczenia amplitudy  $A_k$ . Skrypt nie dodawał do listy znalezionych częstotliwości sygnałów znajdujących blisko częstotliwości o wartościach całkowitych, ponieważ istnieje ryzyko, że są to sygnały instrumentalne. Jest to istotne w przypadku gwiazd RR<sub>0.68</sub>, w których częstotliwości dodatkowych sygnałów czasami znajdują się blisko częstotliwości 2 c/d. Będzie to przedyskutowane w dalszej części rozdziału. Skrypt również nie dodawał częstotliwości znajdujących w odległościach bliższych od dopasowanych już sygnałów niż przyjęta rozdzielczość transformaty Fouriera. Skrypt kończył działanie, gdy w widmie częstotliwości residuów nie pojawiały się nowe sygnały spełniające kryterium  $\text{SNR} > 4$ , lub gdy liczba niezależnych częstotliwości wynosiła 16. Ta maksymalna liczba częstotliwości została wybrana arbitralnie i jest odpowiednio większa od liczby spodziewanych niezależnych częstotliwości w widmie. Skrypt został przetestowany na grupie kilkuset gwiazd przeanalizowanych indywidualnie zanim został wykorzystany do analizy całej próbki gwiazd RRc. Wynikiem działania skryptu jest lista wykrytych częstotliwości w widmie razem z ich amplitudami i fazami.

W kolejnym kroku, spośród gwiazd, w których skrypt znalazł dodatkowe sygnały, zostały wybrane kandydatki na gwiazdy RR<sub>0.61</sub> i RR<sub>0.68</sub> na podstawie częstotliwości tych sygnałów i stosunków ich okresów do okresu pierwszego owertonu. Ostatnim krokiem była indywidualna inspekcja wybranych gwiazd. Dodatkowo sprawdzono, rozważając stosunki okresów skonstruowane z wykorzystaniem wszystkich okresowości znalezionych przez skrypt, czy na diagramie Petersena nie uformowała się nowa, nieznana wcześniej grupa. Dodatkowa grupa, powiązana jednak z gwiazdami RR<sub>0.61</sub>, zostanie opisana w dalszej części rozprawy (patrz rozdział 2.2.1). Pozostałe gwiazdy z dodatkowymi sygnałami, nie tworzące wyraźnych zgrupowań na diagramie Petersena, zostały pominięte w dalszej analizie.

## 2.2 Gwiazdy RR<sub>0.61</sub>

Przedstawiona metoda selekcji pozwoliła na sklasyfikowanie 960 gwiazd RR<sub>0.61</sub>. Spośród nich 949 to gwiazdy RRc, a 11 to gwiazdy RRd. W porównaniu do detekcji z prac [Netzel i in. \(2015b\)](#) i [Netzel i in. \(2015c\)](#), 744 gwiazdy to nowe detekcje. Z tego 734 gwiazdy są typu RRc, a 10 gwiazd typu RRd. Z kolei niektóre gwiazdy, które zostały odkryte w poprzednich analizach, nie zostały sklasyfikowane teraz jako RR<sub>0.61</sub>. Wynika to z typowo dużej niestacjonarności dodatkowych sygnałów, co będzie przedyskutowane szczegółowo w następnych podrozdziałach. Porównując moje wyniki z detekcjami gwiazd RR<sub>0.61</sub> z literatury, odkryłam 95% wszystkich znanych obecnie gwiazd RR<sub>0.61</sub>. Częstość występowania gwiazd RR<sub>0.61</sub> w przypadku gwiazd RRc to 8.8%, a w przypadku gwiazd RRd wynosi 7.4%. Okresy i amplitudy znalezionych modów radialnych i nieradialnych są zebrane w tabeli [A.1](#) oraz w pracy [Netzel i Smolec \(2019\)](#). Znalezione gwiazdy RR<sub>0.61</sub> przedstawiono na diagramie Petersena na [Rys. 2.8](#) razem ze znanymi wielomodalnymi gwiazdami RR Lutni. Na [Rys. 2.9](#) zaprezentowano fragment diagramu Petersena, który odpowiada grupie RR<sub>0.61</sub> i zawiera jedynie gwiazdy znalezione podczas tej analizy. Na prawym panelu znajduje się histogram stosunków okresów dla tej grupy. Widać na nim zarysowane wyraźnie trzy ciągi. Na podstawie minimów w histogramie można wyznaczyć wartości graniczne stosunków okresów pozwalające na rozdzielenie trzech ciągów. Poniżej stosunku okresów 0.62 gwiazda była sklasyfikowana jako należąca do ciągu najniższego (nazywanego od teraz ciągiem 0.61), pomiędzy stosunkami okresów od 0.62 do 0.625 gwiazda należy do ciągu środkowego (ciąg 0.62), a wyższe stosunki okresów klasyfikują gwiazdę do górnego ciągu (ciąg 0.63). Warto zwrócić uwagę, że nie jest to klasyfikacja uniwersalna, ponieważ stosunki okresów

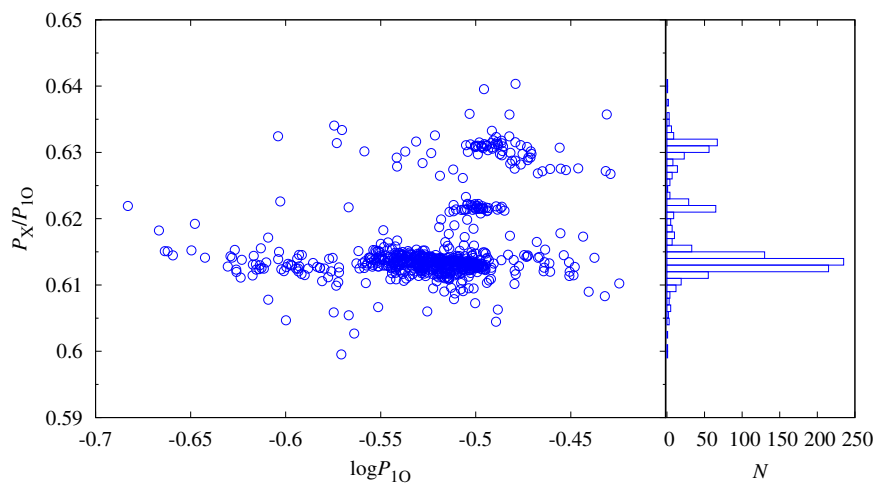




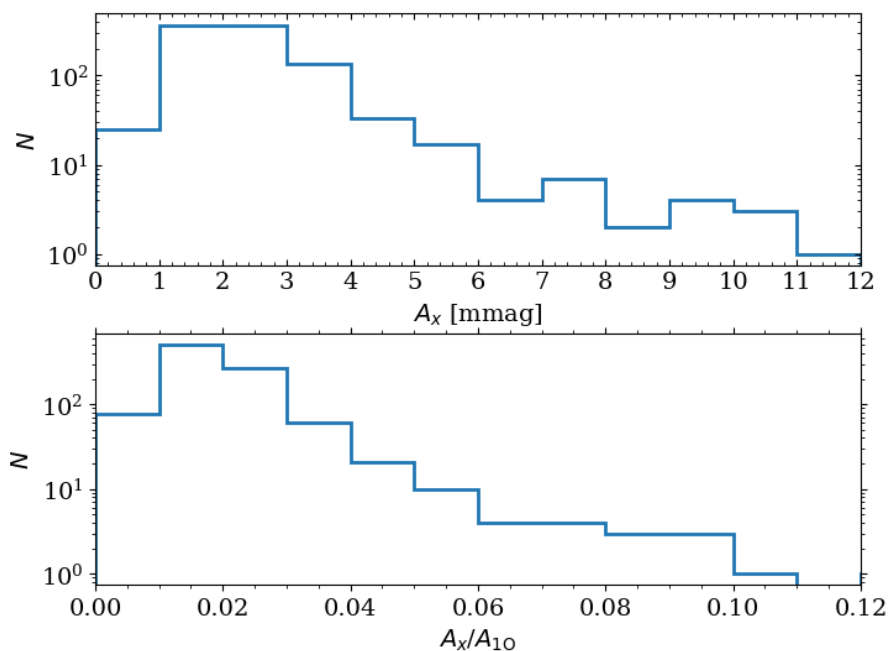
Rysunek 2.8: Diagram Petersena dla znanych wielomodalnych gwiazd RR Lutni razem z wynikami poszukiwania nowych gwiazd  $RR_{0.61}$  i  $RR_{0.68}$ .

zależą od metaliczności (patrz rozdział 4). W związku z tym, dla gwiazd należących do różnych populacji gwiazdowych o określonych metalicznościach, wartości graniczne pomiędzy ciągami mogą być różne. Stosując graniczne stosunki okresów wyznaczone dla badanej próbki, do ciągu 0.61 przypisano 792 gwiazd, do ciągu 0.62 – 112, a do ciągu 0.63 – 221 gwiazd. Łączna liczba gwiazd z trzech ciągów nie sumuje się do 960, ponieważ w przypadku części gwiazd wykryto więcej niż jeden sygnał w widmie częstości. Tym samym taka gwiazda należy do więcej niż jednego ciągu. Podobne obiekty były już zaobserwowane podczas analizy dwóch pól OGLE (Netzel i in. 2015c). W przypadku próbki gwiazd przedstawionej w tym rozdziale, dla 101 gwiazd pojawiły się sygnały odpowiadające dwóm ciągom, a w 34 gwiazdach znaleziono sygnały z trzech ciągów jednocześnie, przy czym jedna z nich ma dodatkowo klasyfikację jako RRd.

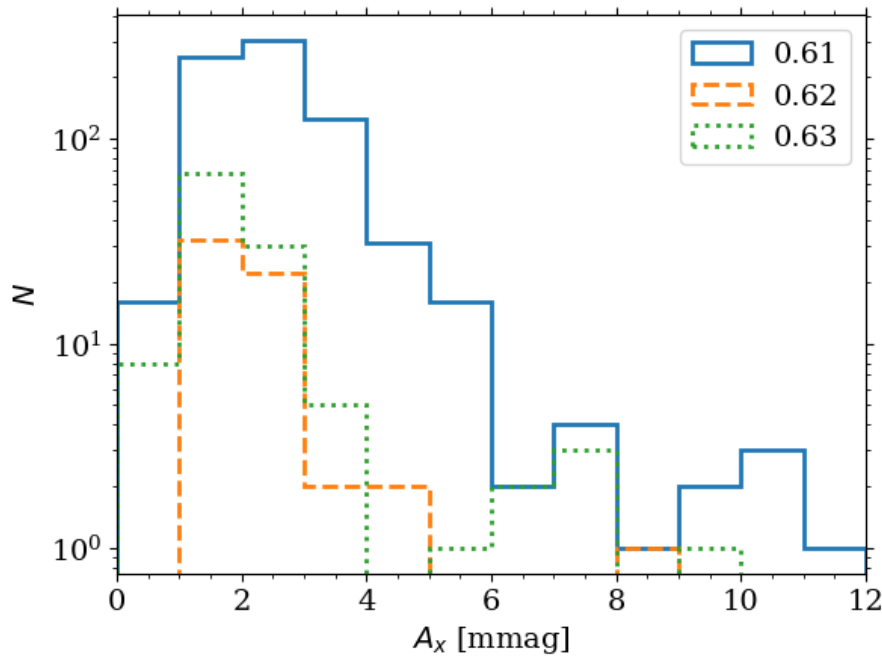
Amplitudy dodatkowych sygnałów są niskie. Histogram amplitud dla gwiazd  $RR_{0.61}$  zaprezentowano na Rys. 2.10, natomiast histogram amplitud z podziałem na gwiazdy poszczególnych ciągów zaprezentowano na Rys. 2.11. Liczba gwiazd jest największa dla amplitud dodatkowego sygnału o wartościach z przedziału 1 – 4 mmag w przypadku wszystkich trzech ciągów. Największa zaobserwowana amplituda w badanej próbce wynosi 11 mmag, natomiast najniższa 0.4 mmag. Na dolnym panelu Rys. 2.10 zaprezentowano histogram stosunków amplitud dodatkowego sygnału i pierwszego owertonu. Typowo amplituda dodatkowego sygnału wynosi od 1% do 4% amplitudy pierwszego owertonu. Najwyższe wartości amplitudy są osiągane przez sygnały odpowiadające ciągowi 0.61. Nie jest jasne, czy w gwiazdach, w których nie obserwuje się dodatkowego sygnału nie jest on wzbudzony, czy jest poniżej progu detekcji. Na rys. 8 w Netzel i in. (2015b) zaprezentowane są wartości SNR dla dodatkowych sygnałów. Liczba znalezionych sygnałów rośnie wraz ze spadkiem SNR, co sugerowałoby, że liczba gwiazd  $RR_{0.61}$  powinna być większa, ale jest ograniczona przez próg detekcji danych naziemnych. Na Rys. 2.12 zaprezentowano porównanie histogramu średniego poziomu szumu w widmach gwiazd sklasyfikowanych jako  $RR_{0.61}$  do rozkładu średniego poziomu szumu dla wszystkich gwiazd RRc. Średnia wartość poziomu szumu została oszacowana w widmach po usunięciu z danych pierwszego owertonu i jego harmonik, w przedziale częstości  $6f_{10} - 7f_{10}$ , gdzie  $f_{10}$  to częstość pierwszego owertonu.



Rysunek 2.9: Zbliżenie na diagramie Petersena na grupę gwiazd  $RR_{0.61}$  sklasyfikowanych na podstawie przeprowadzonych badań. Na prawym panelu został zaprezentowany histogram stosunków okresów dla tej grupy.



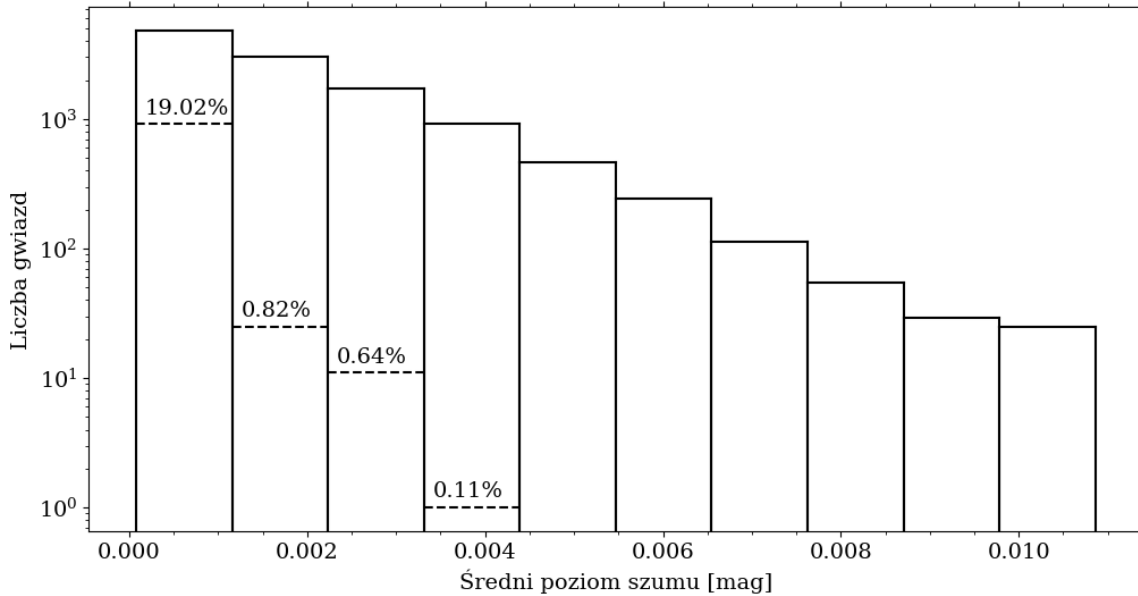
Rysunek 2.10: Histogram amplitud dodatkowego sygnału (górny panel) oraz histogram stosunku amplitudy dodatkowego sygnału do amplitudy pierwszego owertonu (dolny panel).



Rysunek 2.11: Histogram amplitud dodatkowego sygnału z podziałem na 3 ciągi obserwowane na diagramie Petersena.

Tak wybrany przedział częstości zapewnia brak dodatkowych sygnałów (np. instrumentalnych), które by sztucznie podniosły poziom szumu. Częstość występowania gwiazd  $RR_{0.61}$  wyraźnie rośnie wraz ze spadkiem poziomu szumu w widmie, czyli wraz ze wzrostem jakości danych. Największą liczbę gwiazd  $RR_{0.61}$  wykryto w danych o najniższym średnim poziomie szumu. Nie znaleziono żadnej gwiazdy  $RR_{0.61}$  w danych, w których średni poziom szumu przekracza 0.0042 mag. Sugerowałoby to, że dodatkowy sygnał jest powszechny, a w gwiazdach, w których nie został wykryty jest możliwe, że ma amplitudę poniżej progu detekcji (patrz jednak dyskusja w rozdziale 4.5.3).

Wartość progu detekcji istotnie wpływa na częstość występowania gwiazd  $RR_{0.61}$ . W tabeli 2.1 zebrano częstość występowania oraz liczbę znalezionych gwiazd  $RR_{0.61}$  na podstawie różnych źródeł danych. Występowanie gwiazd  $RR_{0.61}$  w polach zgrubienia centralnego Galaktyki zostało zbadane trzykrotnie. Po raz pierwszy na podstawie danych OGLE-III (Netzel i in. 2015b). Wówczas znalazłam 145 gwiazd RRc, co stanowiło 2.9% analizowanej próbki. Druga analiza wykorzystywała dane OGLE-IV dla dwóch najczęściej obserwowanych pól w zgrubieniu centralnym. Znalazłam 131 gwiazd, co odpowiadało 27% wszystkich analizowanych gwiazd. Trzecia analiza przeprowadzona przeze mnie i przedstawiona w niniejszej rozprawie umożliwiła znalezienie 949 gwiazd RRc, co odpowiada częstości występowania wynoszącej jedynie 8.3%. Pomimo dużej liczby znalezionych gwiazd, częstość występowania jest relatywnie niska ze względu na charakter analizowanych danych i dużą liczbę gwiazd o wysokim progu detekcji. Dla gromad M3 oraz NGC 6362 przeanalizowano doskonałej jakości dane naziemne. Liczba znalezionych gwiazd RRc z grupy  $RR_{0.61}$  w gromadzie M3 wynosi 14, a częstość występowania 38%. Jeszcze wyższa częstość występowania odpowiada analizie danych dla gromady NGC 6362 i wynosi 63%. Najwyższe wartości częstości występowania odpowiadają analizom danych kosmicznych, w których próg detekcji jest niski. Na podstawie danych K2 znaleziono 3 gwiazdy RRc należące do grupy  $RR_{0.61}$ , co odpowiada częstości występowania 75%. Analiza danych TESS pozwoliła na znalezienie 20 takich gwiazd i w tym przypadku częstość występowania to 65%. Najwyż-



Rysunek 2.12: Histogram średniej wartości poziomu szumu w widmie dla gwiazd  $RR_{0.61}$  (przerwane linie) oraz wszystkich gwiazd RRc (ciągłe linie). Podano częstość występowania gwiazd  $RR_{0.61}$  w poszczególnych przedziałach. Rozkład został pokazany do wartości średniego poziomu szumu 0.01 mag, podczas gdy maksymalna wartość średniego poziomu szumu dla całej populacji gwiazd RRc wynosi 0.022 mag.

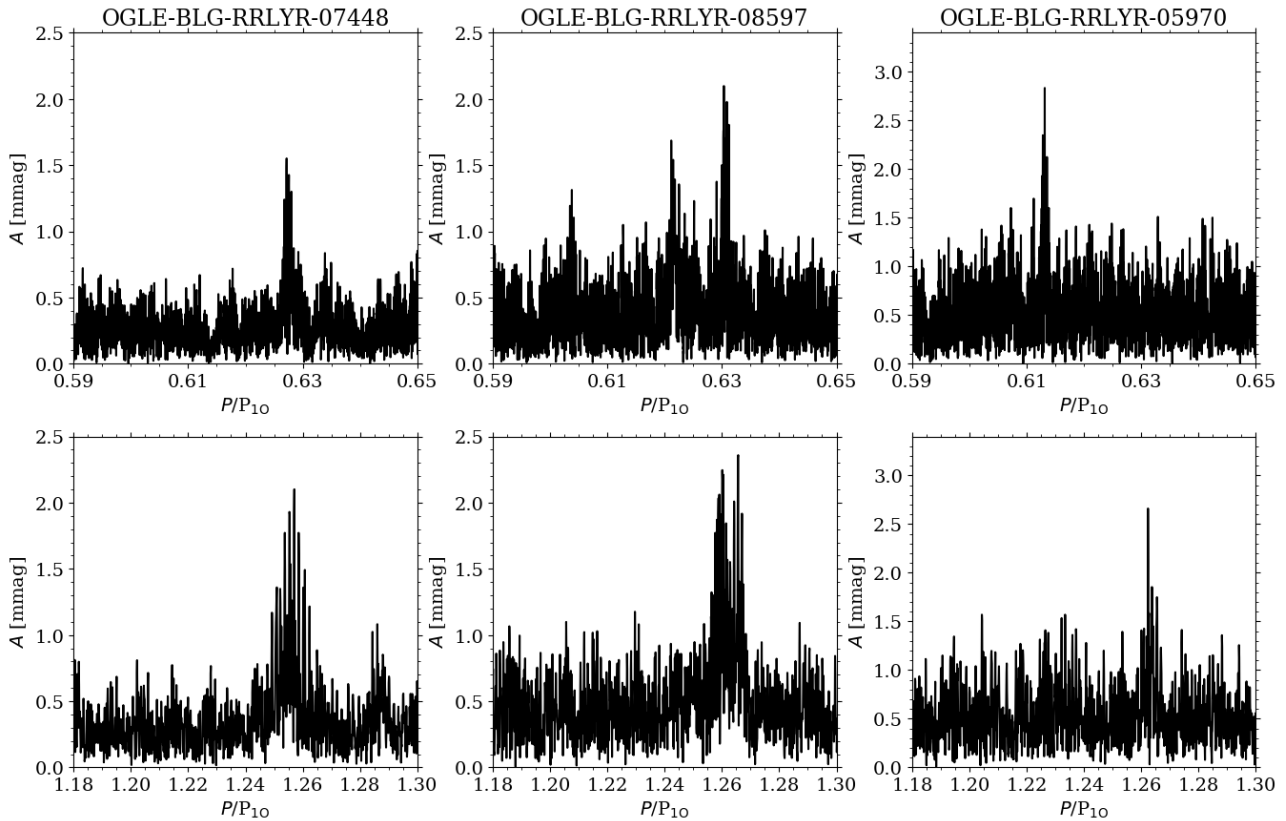
sza częstość występowania odpowiada analizie danych z satelity *Kepler* z oryginalnego pola, bowiem we wszystkich czterech obserwowanych gwiazdach RRc znaleziono dodatkowy sygnał  $RR_{0.61}$ .

### 2.2.1 Subharmoniki dodatkowych sygnałów w gwiazdach $RR_{0.61}$

W niektórych gwiazdach  $RR_{0.61}$  obserwuje się subharmoniki dodatkowych sygnałów. Są to sygnały o częstościach  $1/2f_x$  lub  $3/2f_x$ , gdzie  $f_x$  to częstość dodatkowego sygnału. W szczególności, spotykane są one w gwiazdach obserwowanych przez teleskopy kosmiczne (patrz np. [Moskalik i in. 2015](#)), jednak są możliwe do wykrycia także w obserwacjach naziemnych. W przypadku danych naziemnych obserwuje się jednak w większości subharmoniki  $1/2f_x$ . Jedyne w dwóch gwiazdach pojawia się sygnał bliski częstości  $3/2f_x$  ([Netzel i in. 2015c](#)). Wśród

Tabela 2.1: Częstość występowania gwiazd  $RR_{0.61}$  w gwiazdach RRc.

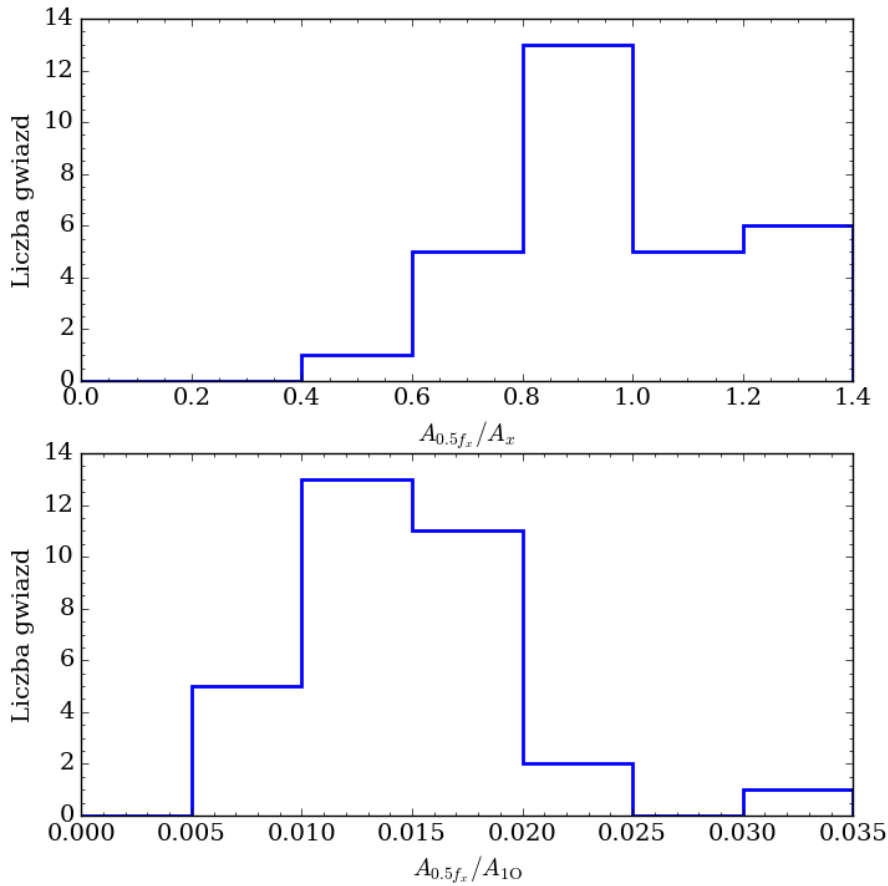
System	Częstość występowania	$N_{RR_{0.61}}$	Referencja
OGLE-IV	8.3%	949	<a href="#">Netzel i Smolec (2019)</a>
OGLE-III	2.9%	145	<a href="#">Netzel i in. (2015b)</a>
2 pola OGLE-IV	27%	131	<a href="#">Netzel i in. (2015c)</a>
TESS	65%	20	Molnar i in. (wysłana)
Pisces K2	75%	3	<a href="#">Molnár i in. (2015)</a>
M3	38%	14	<a href="#">Jurcsik i in. (2015)</a>
NGC 6362	63%	10	<a href="#">Smolec i in. (2017)</a>
pole <i>Keplera</i>	100%	4	<a href="#">Moskalik i in. (2015)</a>



Rysunek 2.13: Przykład subharmonik dodatkowego modu dla trzech gwiazd. Górne panele przedstawiają zakres częstości odpowiadający dodatkowym sygnałom, dolny panel przedstawia zakres częstości odpowiadający ich subharmonikom. Oś x odpowiada stosunkom okresów na diagramie Petersena.

960 gwiazd  $RR_{0.61}$ , znalazłam sygnały odpowiadające subharmonikom  $1/2f_x$  w 114 gwiazdach, z czego 111 jest sklasyfikowanych jako RRc, a 3 jako RRd. Subharmoniki  $3/2f_x$  nie zostały znalezione w żadnej z gwiazd. Przykład subharmonik w widmach częstości trzech gwiazd jest zaprezentowany na Rys. 2.13 w funkcji stosunku okresów,  $P/P_{10}$ . Górne panele przedstawiają dodatkowy sygnał, natomiast dolne odpowiadają zakresowi częstości subharmonik. Zakresy osi są tak ustalone, aby bezpośrednio pod dodatkowym sygnałem znajdowała się jego subharmonika. W trzech gwiazdach prezentowanych na Rys. 2.13, jak również w większości analizowanych w tej pracy gwiazd  $RR_{0.61}$ , częstości sygnałów interpretowanych jako subharmoniki nie odpowiadają dokładnie połowie częstości dodatkowego sygnału. Sygnały są niekoherentne i znajdują się jedynie około przewidywanych częstości. Poszerzenie wyniku ze zmienności, która zostanie szczegółowo przedyskutowana w następnych podrozdziałach. W widmach częstości dwóch pierwszych gwiazd przedstawionych na Rys. 2.13, OGLE-BLG-RRLYR-07448 i OGLE-BLG-RRLYR-08597, obserwujemy dodatkowe sygnały oraz subharmoniki wycelowane na częstości  $1/2f_x$ . Natomiast na przykładzie gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-05970 przedstawiona jest znacznie częściej obserwowana sytuacja, czyli sygnał subharmoniki nie odpowiada bezpośrednio dodatkowemu sygnałowi. W przypadku tej gwiazdy widoczny jest dodatkowy sygnał pasujący do dolnego ciągu 0.61 (prawy górny panel Rys. 2.13), natomiast subharmonika odpowiada niewykrytemu sygnałowi z górnego ciągu 0.63 (prawy dolny panel Rys. 2.13).

Na Rys. 2.14 przedstawiony jest histogram stosunków amplitudy subharmoniki do amplitudy sygnału  $f_x$ , a także histogram stosunków amplitudy subharmoniki do amplitudy pierwszego

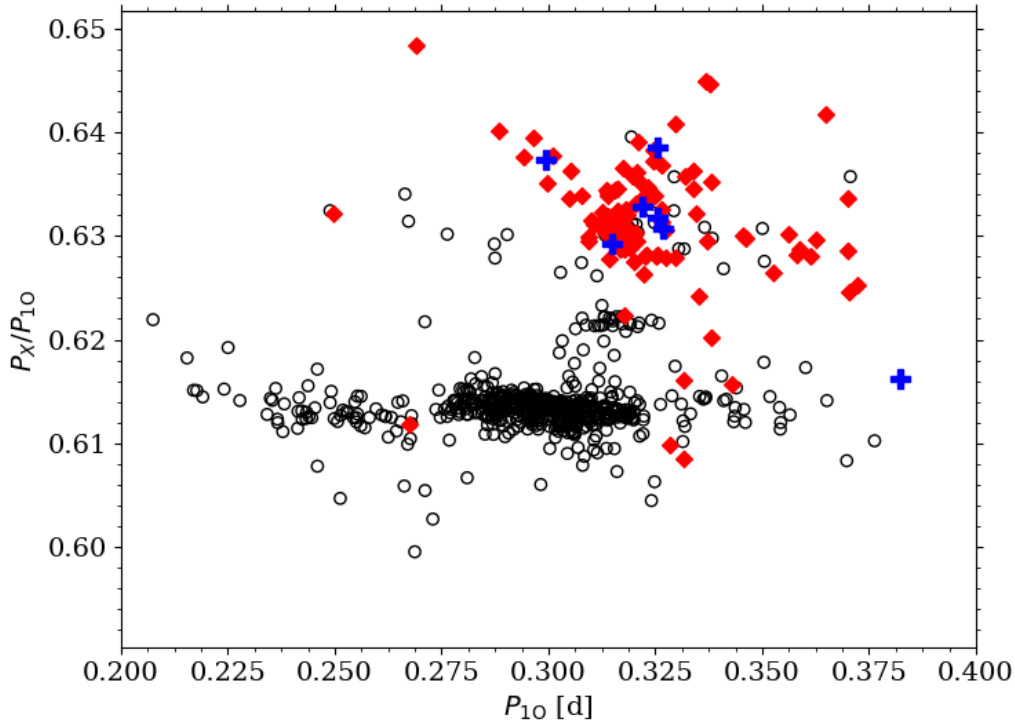


Rysunek 2.14: Górny panel: histogram stosunków amplitud subharmonik  $1/2f_x$  do amplitudy sygnału  $f_x$ . Dolny panel: histogram stosunków amplitud subharmonik  $1/2f_x$  do amplitudy pierwszego owertonu.

owertonu. Na Rys. 2.14 uwzględniono jedynie 32 gwiazdy, w których sygnał subharmoniki bezpośrednio odpowiada dodatkowemu sygnałowi (patrz Rys. 2.13). Większość subharmonik ma amplitudy stanowiące 0.5 – 2.5% amplitudy pierwszego owertonu oraz powyżej 60% amplitudy sygnału  $f_x$ . Interesujący jest fakt, że dla 11 spośród 32 gwiazd, subharmonika ma wyższą amplitudę niż sygnał  $f_x$ .

Występowanie subharmonik i ich własności są ważne ze względu na obecnie zaproponowaną hipotezę tłumaczącą naturę gwiazd RR<sub>0.61</sub> (Dziembowski 2016). Zgodnie z tym wyjaśnieniem, subharmoniki są w rzeczywistości wzbudzonymi modami nieradialnymi o stopniach,  $\ell=8$  lub 9. Model tłumaczy również analogiczne sygnały w Cefeidach klasycznych, co zostało przedyskutowane we wstępie. Ze względu na efekt uśredniania, który jest silniejszy dla modów nieradialnych o stopniu  $\ell = 9$  niż dla  $\ell=8$ , powinno być łatwiej wykryć mod o  $\ell = 8$ . Gwiazdy RR<sub>0.61</sub> z subharmonikami pozwalają na przetestowanie tej teorii. Większość obserwowanych subharmonik powinna odpowiadać sygnałom należącym do ciągu 0.63. Przyjmując  $P_s$  jako okres subharmoniki, okres  $0.5P_s$  odpowiada dodatkowym sygnałom tworzącym stosunek okresów z przedziału 0.60 – 0.65 z okresem pierwszego owertonu. Na diagramie Petersena można zatem na podstawie obserwowanych okresów subharmonik,  $P_s$ , sprawdzić przynależność gwiazd do konkretnego ciągu używając stosunku okresów  $\frac{0.5P_s}{P_{10}}$ . Są one przedstawione za pomocą czerwonych symboli na tle wszystkich gwiazd RR<sub>0.61</sub> na Rys. 2.15. Rzeczywiście większość subharmonik odpowiada ciągowi 0.63, czyli modom nieradialnym o stopniu  $\ell = 8$  (92% gwiazd).





Rysunek 2.15: Diagram Petersena dla gwiazd RR<sub>0.61</sub> oraz gwiazd RR<sub>0.61</sub> z subharmonikami. Gwiazdy, w których wykryto subharmoniki są oznaczone za pomocą czerwonych symboli. Za pomocą niebieskich plusów zaznaczono gwiazdy z dodatkowym sygnałem  $f_Y$  (patrz tekst).

Tabela 2.2: Lista gwiazd, w których znaleziono dodatkowy sygnał o częstotliwości  $f_Y$ . Kolejne kolumny zawierają nazwę gwiazdy, okres pierwszego owertonu ( $P_{10}$ ) i dodatkowego sygnału ( $P_Y$ ), stosunek okresów jaki tworzy okres harmoniki dodatkowego sygnału z okresem pierwszego owertonu ( $0.5P_Y/P_{10}$ ), amplitudę pierwszego owertonu oraz stosunek amplitud.

OGLE-BLG-RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_Y$ [d]	$0.5P_Y/P_{10}$	$A_{10}$ [mag]	$A_Y/A_{10}$
02815	0.31485827(8)	0.396265(7)	0.62928	0.1265(5)	0.017
04622	0.3220768(2)	0.407628(7)	0.63281	0.1358(9)	0.034
05746	0.32689535(6)	0.412324(6)	0.63067	0.1284(3)	0.015
06501	0.32539511(7)	0.415580(6)	0.63858	0.1160(4)	0.014
09926	0.38240378(3)	0.471320(4)	0.61626	0.1129(2)	0.014
31948	0.29931521(4)	0.381558(3)	0.63739	0.1277(3)	0.012
32466	0.32554603(8)	0.411304(6)	0.63171	0.1168(4)	0.016

W kontekście subharmonik i modelu z pracy Dziembowski (2016), szczególnie interesująca jest grupa siedmiu gwiazd RRc, które nie należą do grupy RR<sub>0.61</sub>. W tych siedmiu gwiazdach występuje dodatkowy sygnał,  $f_Y$ . Częstość  $f_Y$  jest mniejsza od częstości pierwszego owertonu i tworzy z nim stosunek okresów  $\sim 0.79$ . Taka wartość stosunku okresów nie może odpowiadać dodatkowemu modowi radialnemu. Ta wartość jest również wyższa niż typowy stosunek okresów w przypadku pulsacji RRd, co oznacza, że częstość  $f_Y$  jest niższa niż częstość modu fundamentalnego, który nie jest wykryty w tych gwiazdach. Harmonika dodatkowego sygnału, czyli sygnał o częstości  $2f_Y$ , tworzy z pierwszym owertonem stosunek okresów z przedziału 0.60 – 0.65 charakterystyczny dla RR<sub>0.61</sub>. Lista gwiazd oraz ich okresy są przedstawione w Tab. 2.2 i w tab. 3 w Netzel i Smolec (2019). Okresy odpowiadające częstości  $2f_Y$  zostały wykorzystane, aby uzyskać stosunki okresów z okresem pierwszego owertonu, co jest zaprezentowane na diagramie Petersena na Rys. 2.15 (niebieskie pluse). Wszystkie gwiazdy znajdują się w górnym ciągu, poza jedną, która odpowiada ciągowi 0.61. Jest to zatem analogiczna sytuacja jak w przypadku gwiazd RR<sub>0.61</sub> z subharmonikami (Rys. 2.15, czerwone symbole). Następujące fakty sugerują, że sygnał  $f_Y$  odpowiada subharmonikom wykrywanym w gwiazdach RR<sub>0.61</sub>. Po pierwsze, harmonika sygnału  $f_Y$  pasuje do stosunków okresów RR<sub>0.61</sub>. Po drugie, dla 82 gwiazd z 114 gwiazd z subharmonikami, sygnał subharmoniki jest niezależny od sygnału dodatkowego. Po trzecie, w 32 gwiazdach, w których sygnał subharmoniki odpowiada dodatkowemu sygnałowi, obserwuje się wyższą amplitudę subharmoniki w 34% gwiazd. Co więcej, w modelu zaproponowanym przez Dziembowski (2016), sygnał  $f_Y$  odpowiada modowi nieradialnemu. Dużo prostszym i atrakcyjniejszym wyjaśnieniem natury dodatkowego sygnału  $f_Y$  jest fakt, że gwiazdy te są tymi samymi obiektami co RR<sub>0.61</sub>, w których nie obserwuje się sygnału  $f_x$ . Jedna gwiazda tego typu została zaobserwowana niedawno na podstawie danych kosmicznych. Benkó i in. (2021) wykorzystali dane fotometryczne z teleskopu TESS dla gwiazdy RRc T Sex. Na ich podstawie znaleźli sygnał pasujący do subharmoniki sygnału  $f_x$ . Jest to kolejna znana gwiazda tego typu i pierwsza zaobserwowana na podstawie danych kosmicznych.

Przyjmując hipotezę zaproponowaną z pracy Dziembowski (2016), określanie sygnałów  $1/2f_x$  jako subharmonik jest niewłaściwe. Zgodnie z tą hipotezą jest to bowiem nieradialny mod pulsacji, a sygnał  $f_x$  jest jego harmoniką. W dalszej części rozprawy sygnał  $f_x$  będzie nazywany harmoniką modu nieradialnego, natomiast sygnał  $1/2f_x$  modem nieradialnym o określonym stopniu. Położenie gwiazd z subharmonikami na diagramie Petersena (patrz Rys. 2.15) stanowi mocny dowód na poparcie tej hipotezy. W dalszych rozdziałach zostaną przedstawione kolejne argumenty na poparcie modelu Dziembowskiego.

### 2.2.2 Gwiazdy z więcej niż jednym sygnałem

W 135 gwiazdach z 960 zbadanych RR<sub>0.61</sub>, w widmie częstości widać więcej niż jeden dodatkowy sygnał w zakresie częstości  $(0.6 - 0.65)P_{10}$ . Przykłady widm częstości kilku takich gwiazd są zaprezentowane na Rys. 2.16. Wartość na osi x odpowiada stosunkom okresów na diagramie Petersena. Wyraźnie widać dużą różnorodność w widmach częstości. W gwiazdach OGLE-BLG-RRLYR-05504, OGLE-BLG-RRLYR-05688, OGLE-BLG-RRLYR-05931 i OGLE-BLG-RRLYR-05968 znaleziono 2 częstości odpowiadające dwóm odrębnym ciągom na diagramie Petersena. W przypadku gwiazd OGLE-BLG-RRLYR-05504 i OGLE-BLG-RRLYR-05688 są to ciągi 0.61 i 0.62. Gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-05931 i OGLE-BLG-RRLYR-05968 należą do ciągów 0.61 i 0.63. Gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-06083 i OGLE-BLG-RRLYR-06461 mają wyraźnie wyodrębnione sygnały, które jednak pasują do jednego ciągu. W przypadku gwiazdy z panelu OGLE-BLG-RRLYR-06083, jest to ciąg 0.61, a w przypadku gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-06461 jest to ciąg 0.63. Dodatkowo w gwieździe

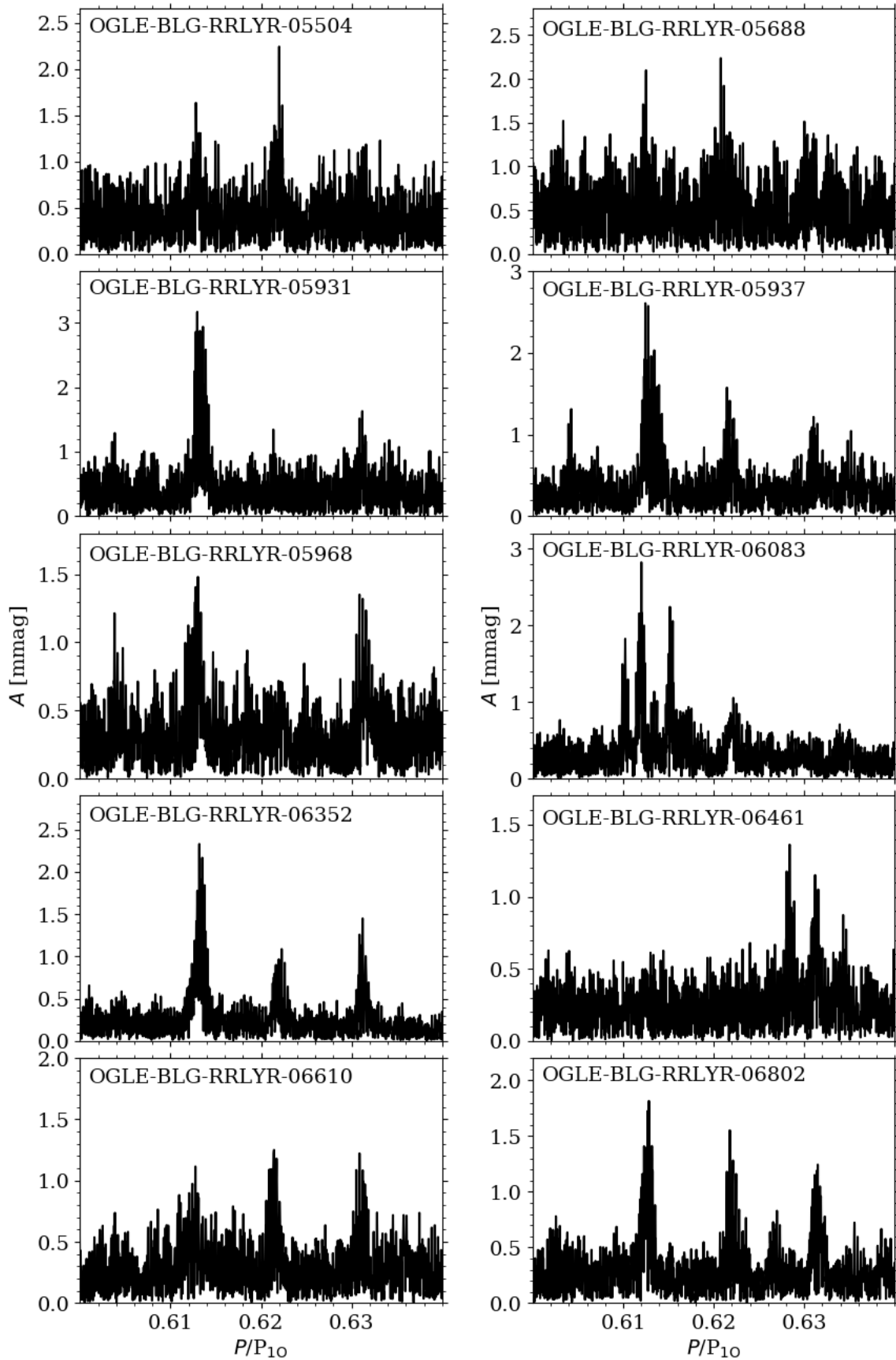
OGLE-BLG-RRLYR-06083 można zauważyć nadwyżkę sygnału odpowiadającą ciągowi 0.62. W gwiazdach OGLE-BLG-RRLYR-05937, OGLE-BLG-RRLYR-06352, OGLE-BLG-RRLYR-06610 oraz OGLE-BLG-RRLYR-06802 wyraźnie widać trzy sygnały odpowiadające wszystkim trzem ciągami z diagramu Petersena.

Większa liczba sygnałów w jednej gwiazdzie była już zaobserwowana na podstawie analizy innych próbek. W tab. 1 w pracy [Netzel i in. \(2015b\)](#) znajduje się jedna gwiazda, w której sygnały pasują do ciągów 0.61 i 0.62 jednocześnie, a w tab. 2 z tej samej pracy (tab. 2 odpowiada gwiazdom, które są jedynie kandydatkami ze względu na niski SNR dla znalezionych dodatkowych sygnałów) znajduje się jedna gwiazda o dwóch rozdzielonych sygnałach, przy czym oba pasują jedynie do ciągu 0.61. Kilka sygnałów odpowiadających jednemu ciągowi było także obserwowanych w gwiazdach z M3 ([Jurcsik i in. 2015](#)). Podobna złożona struktura sygnału z jednego ciągu była zaobserwowana w czterech gwiazdach RRc na podstawie fotometrii z *Keplera* ([Moskalik i in. 2015](#)). Natomiast w dwóch gwiazdach z NGC 6362 zaobserwowano dwa sygnały odpowiadające dwóm ciągami 0.61 i 0.63 ([Smolec i in. 2017](#)).

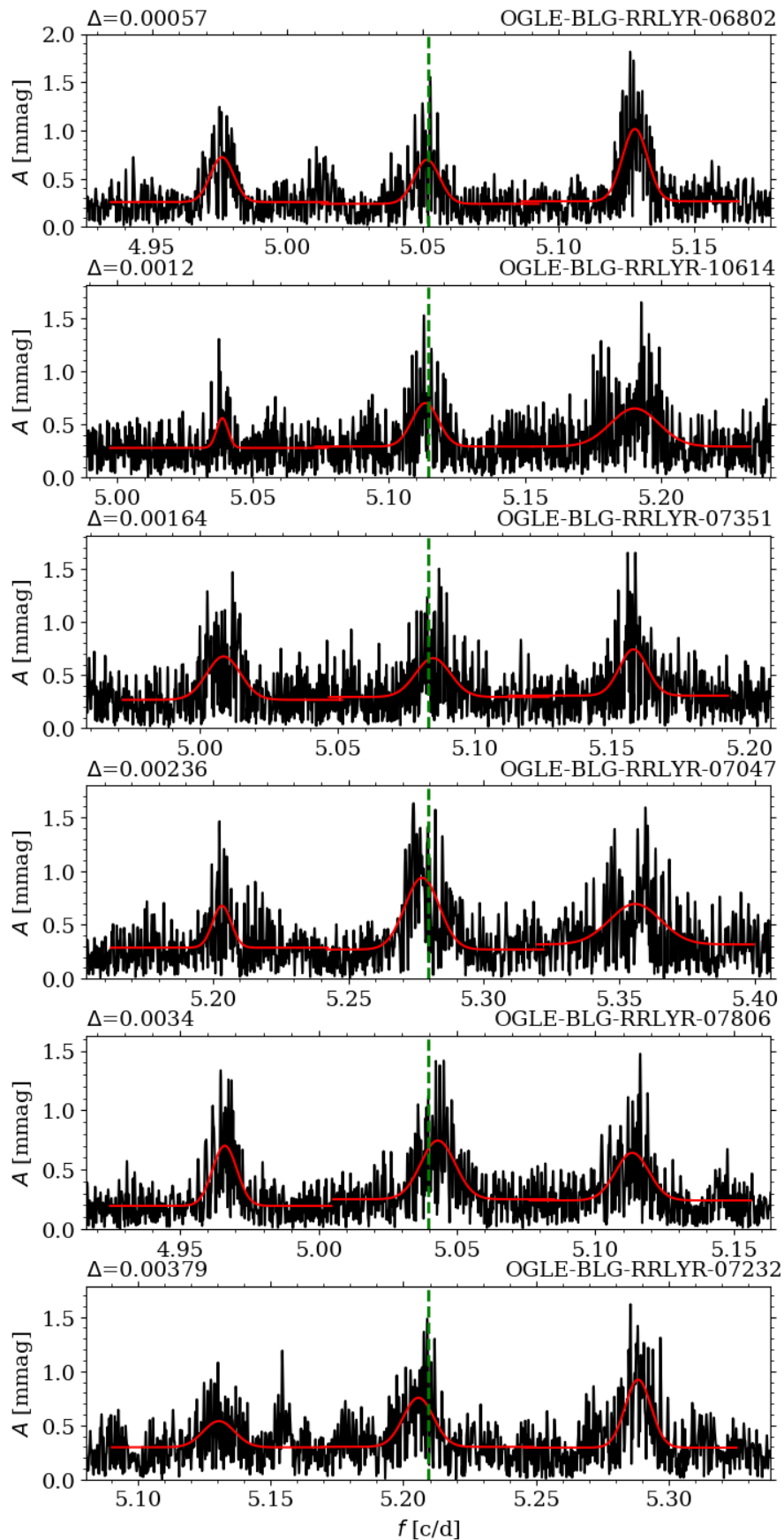
Z punktu widzenia modelowania, najciekawsze są gwiazdy  $RR_{0.61}$ , w których obserwuje się sygnały odpowiadające ciągami 0.61 oraz 0.63, ponieważ, zgodnie modelem zaproponowanym przez [Dziembowski \(2016\)](#), są to harmoniki modów nieradialnych o stopniach 8 i 9. W tym modelu środkowy ciąg pojawia się na skutek istnienia częstości kombinacyjnej modów nieradialnych  $f_8 + f_9$ . 34 gwiazdy, w których zostały wykryte sygnały odpowiadające wszystkim trzem ciągami, pozwalają na kolejny test modelu Dziembowskiego. Jeśli jest słuszny, to częstość sygnału odpowiadającego środkowemu ciągowi powinna być średnią arytmetyczną częstości sygnałów z ciągami 0.61 i 0.63. Ze względu na to, że sygnały są typowo bardzo szerokie i o skomplikowanej strukturze (patrz Rys. 2.16), precyzyjne określenie odpowiadającej im częstości jest trudne i niejednoznaczne. W szczególności, wybieranie najwyższego sygnału spośród poszerzonych struktur, mogłoby prowadzić w tym przypadku do błędnych wniosków. W związku z tym, do struktury sygnałów została dopasowana funkcja Gaussa i jako częstości przyjęto częstość maksimum funkcji Gaussa. Na Rys. 2.17 przedstawiony jest przykład dopasowania funkcji Gaussa do sygnałów w gwiazdach  $RR_{0.61}$  z trzema ciągami. Zielona przerywana linia odpowiada średniej arytmetycznej częstości z dwóch skrajnych ciągów oszacowanych za pomocą dopasowania funkcji Gaussa. Nad każdym panelem podano dodatkowo wartość parametru  $\Delta = |f_{0.62} - 0.5(f_{0.61} + f_{0.63})|$ , który określa różnicę między średnią a obserwowaną częstością środkowego ciągu, przy czym częstości  $f_{0.61}$ ,  $f_{0.62}$  oraz  $f_{0.63}$  zostały określone na podstawie funkcji Gaussa. Na Rys. 2.17 przedstawiono gwiazdy o różnych wartościach parametru  $\Delta$  i posortowano je zgodnie z rosnącą wartością  $\Delta$ . Dla niektórych gwiazd wartość  $\Delta$  jest większa niż wynikająca z rozdzielczości transformaty Fouriera. Jednak zawsze średnia arytmetyczna mieści się w granicach szerokości połówkowej funkcji Gaussa dopasowanej do ciągu środkowego. Biorąc pod uwagę naturę sygnałów, obserwacje są zgodne z modelem z pracy [Dziembowski \(2016\)](#), w którym środkowy ciąg odpowiada kombinacji  $f_8 + f_9$ . Takie wnioski są poprawne dla wszystkich pozostałych gwiazd z trzema ciągami w widmie częstości, które nie zostały pokazane na Rys. 2.17.

### 2.2.3 Niestacjonarność modów nieradialnych i ich harmonik

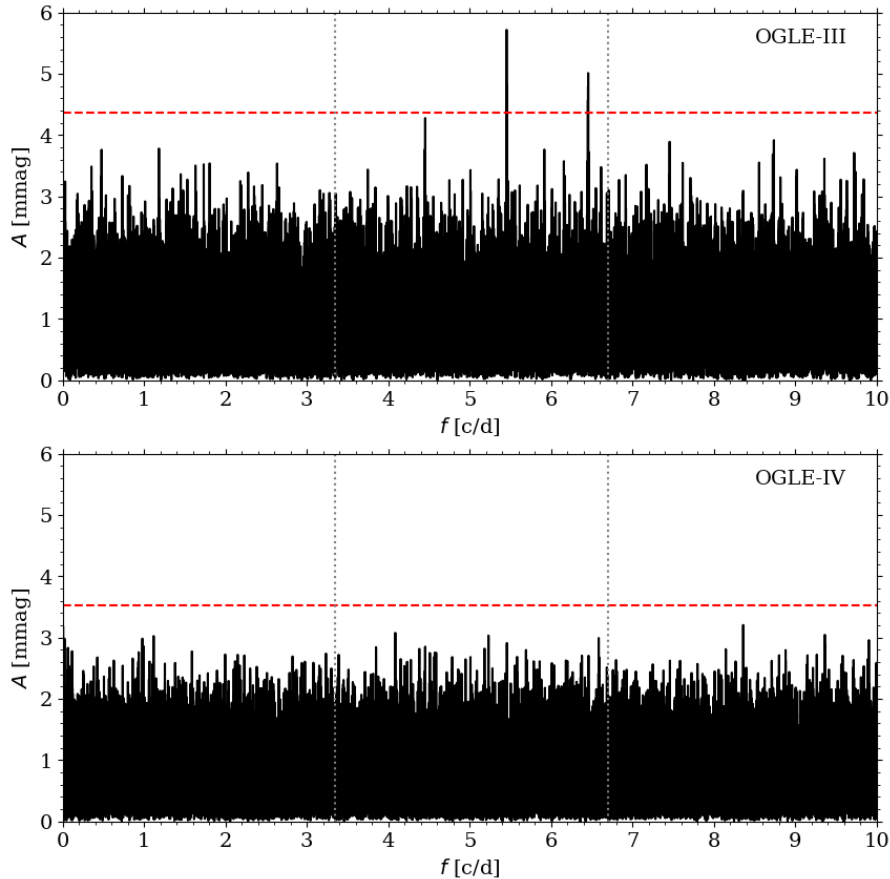
Wyraźne poszerzenie sygnałów w widmach częstości gwiazd  $RR_{0.61}$  wynika z niestacjonarności tych sygnałów. Nieco inną konsekwencją zmian amplitudy może być detekcja lub brak detekcji dodatkowego sygnału w różnych danych dla tej samej gwiazdy. Przykładem są gwiazdy, które na podstawie różnych danych były sklasyfikowane jako  $RR_{0.61}$  w jednej analizie, a w kolejnej nie. Taką gwiazdą jest OGLE-BLG-RRLYR-16157. Na Rys. 2.18 pokazane jest dla



Rysunek 2.16: Przykładowe zbliżenia na zakres widma częstości z harmonikami modów nieradialnych w funkcji stosunku okresów,  $P/P_{10}$ .



Rysunek 2.17: Przykłady gwiazd z sygnałami odpowiadającymi trzem ciągom na diagramie Petersena. Gwiazdy te posłużyły do przetestowania teorii, że środkowy sygnał odpowiada liniowej kombinacji modów nieradialnych.

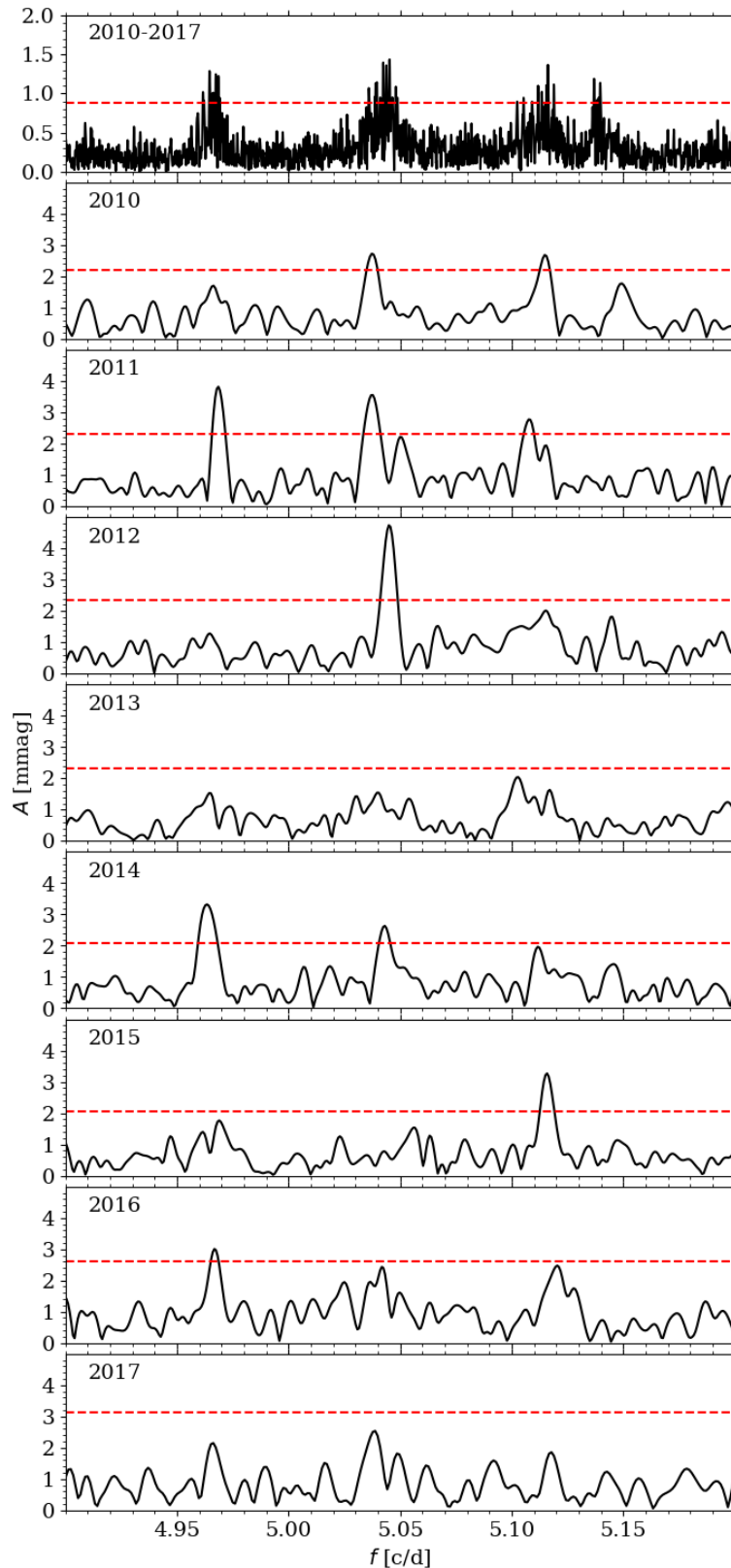


Rysunek 2.18: Widmo częstości dla gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-16157, w której na podstawie danych OGLE-III znaleziono dodatkowy sygnał (górny panel). W analizie danych OGLE-IV sygnał nie jest widoczny (dolny panel). Pozycje odjętego sygnału pierwszego owertonu i jego harmoniki są zaznaczone szarą kropkowaną linią.

niej porównanie widm częstości po usunięciu częstości pierwszego owertonu i jego harmonik na podstawie danych OGLE-III i OGLE-IV. Gwiazda OGLE-BLG-RRLYR-16157 na podstawie danych OGLE-III została sklasyfikowana jako  $RR_{0.61}$  (Netzel i in. 2015b). Dodatkowy sygnał jest wyraźny oraz jego amplituda jest znacznie powyżej progu detekcji. Średni poziom szumu w danych OGLE-III dla tej gwiazdy wynosi 1.1 mmag. Korzystając z danych OGLE-IV dodatkowy sygnał nie został znaleziony, pomimo niższego średniego poziomu szumu wynoszącego 0.9 mmag. Brak detekcji sygnału musi więc wynikać ze zmiennej amplitudy.

Na Rys. 2.19 przedstawiono widma częstości dla gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-7806, która na podstawie danych z 8 sezonów OGLE-IV jest sklasyfikowana jako  $RR_{0.61}$  z detekcją sygnałów odpowiadających trzem ciągom na diagramie Petersena. Każdy panel przedstawia fragment widma częstości odpowiadający częstościom dodatkowych sygnałów. Za pomocą czerwonej przerywanej linii zaznaczono czterokrotny średni poziom szumu w widmie, który wskazuje na granicę detekcji. Górny panel przedstawia fragment widma częstości dla wszystkich ośmiu sezonów danych. Wszystkie 3 sygnały są powyżej progu detekcji. Dodatkowy sygnał w okolicy  $f \approx 5.15$  c/d nie jest związany z modami nieradialnymi, ale jest aliasem od pozostałego sygnału związanego z niestacjonarnością pierwszego owertonu. Kolejne panele odpowiadają widmom policzonym dla poszczególnych sezonów obserwacyjnych wskazanych w lewym górnym rogu paneli. Analiza krótszych fragmentów danych oznacza podniesienie progu detekcji, jest on jednak na podobnym poziomie dla każdego z sezonów. Wszystkie trzy sygnały są wykrywalne jedynie





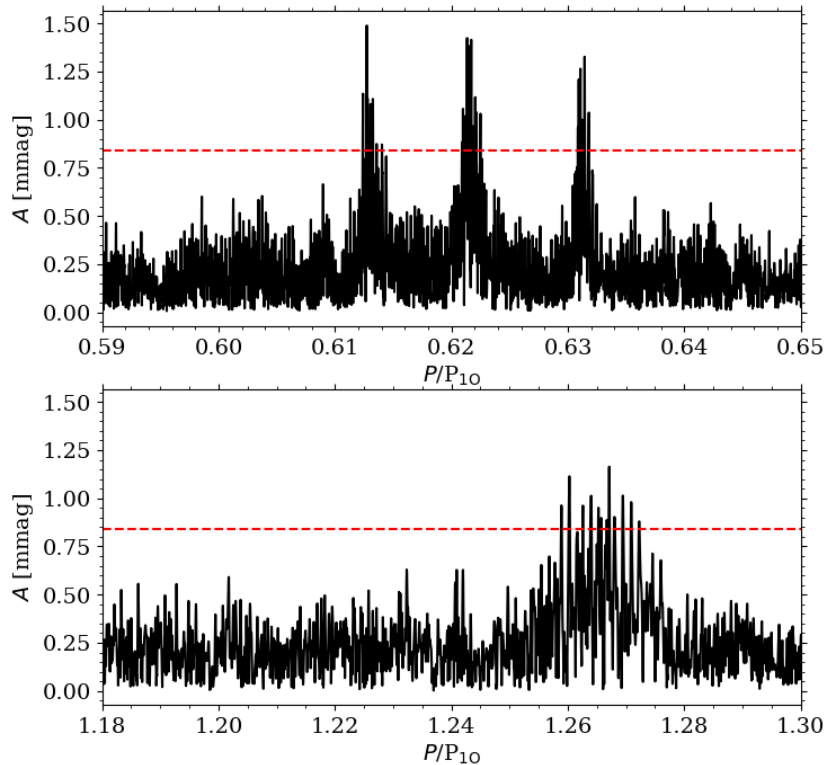
Rysunek 2.19: Gwiazda  $RR_{0.61}$  OGLE-BLG-RRLYR-7806, w której wykryto sygnały odpowiadające trzem ciągom na diagramie Petersena. Wszystkie panele przedstawiają fragment widma częstości odpowiadający dodatkowym sygnałom, po usunięciu pierwszego owertonu i jego harmonik. Górny panel odpowiada widmu częstości dla danych ze wszystkich dostępnych sezonów. Następne panele odpowiadają poszczególnym sezonom obserwacyjnym, co jest wskazane w górnym lewym rogu każdego panelu. Czerwona przerywana linia odpowiada czterokrotności średniego poziomu szumu z widma.

w danych z roku 2011. W danych z sezonów 2010 i 2014 tylko dwa sygnały są widoczne, a także w każdym sezonie odpowiadają innym ciągom. W danych z roku 2012 jedynym wykrywalnym sygnałem, był ten, odpowiadający środkowemu ciągowi. Co ciekawe, ma on najwyższą amplitudę ze wszystkich sezonów, bo przekraczającą 4 mmag. W sezonach 2015 i 2016 powyżej progu detekcji jest tylko jeden sygnał i dla każdego sezonu odpowiada on innemu ciągowi. Natomiast na podstawie danych z lat 2013 i 2017 gwiazda nie zostałaby w ogóle sklasyfikowana jako RR<sub>0.61</sub>. Widać, że zmianie ulega zarówno amplituda jak i częstość sygnałów. Oba efekty wpływają na to, że w widmie częstości dla całych danych zamiast jednego koherentnego sygnału obserwujemy grupę sygnałów i skomplikowane struktury widoczne także na Rys. 2.16.

W tej samej gwiazdzie obserwuje się także częstość odpowiadającą modowi nieradialnemu. Na Rys. 2.20 przedstawione są dwa fragmenty widma częstości gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-07806. Górny panel odpowiada zakresowi częstości harmonik modu nieradialnego. Dolny panel odpowiada częstościom modu nieradialnego. Na osi poziomej znajduje się stosunek okresów jaki tworzy sygnał z okresem pierwszego owertonu. Wartości na osi x dolnego panelu odpowiadają połowie częstości sygnału z górnego panelu. Można zauważyć, że harmonika sygnału widocznego na dolnym panelu jest związana z ciągiem 0.63. Z przeprowadzonej analizy dla poszczególnych sezonów dla zakresu widma odpowiadającemu modowi nieradialnemu wynika, że w danych z lat 2010 – 2013 sygnał był widoczny (choć w roku 2011 był jedynie na granicy detekcji), natomiast w sezonach 2014 – 2017 nie był wykrywalny. Najwyższą amplitudę miał w danych z roku 2013. Jest to o tyle ciekawe, że dla tego sezonu nie udało się wykryć jego harmoniki (patrz Rys. 2.19). Wówczas OGLE-BLG-RRLYR-7806 nie zostałaby sklasyfikowana jako RR<sub>0.61</sub>, ale trafiłaby do grupy 7 gwiazd z sygnałami tworzącymi stosunek okresów 0.79 z pierwszym owertonem oraz z gwiazdą T Sex (patrz rozdział 2.2.1 i Benkó i in. 2021).

Na Rys. 2.20 widać, że sygnał odpowiadający modowi nieradialnemu jest znacznie szerszy niż sygnały harmonik. Jest to bardzo często spotykane w gwiazdach RR<sub>0.61</sub>. Więcej przykładów jest przedstawionych na rys. 11 w pracy Netzel i in. (2015c). Podobne szerokie struktury obserwuje się praktycznie we wszystkich gwiazdach z grupy RR<sub>0.61</sub>. Były one przedyskutowane między innymi na podstawie czterech gwiazd RRc z oryginalnego pola *Keplera* (Moskalik i in. 2015). Na rys. 8 w pracy Moskalik i in. (2015) przedstawiono fragment widma częstości odpowiadający dodatkowemu sygnałowi,  $f_x$ , oraz sygnałowi  $1.5f_x$  dla czterech gwiazd RRc. Sygnały odpowiadające częstościom  $0.5f_x$  w trzech z nich zaprezentowane są na rys. 14 w pracy Netzel i in. (2015c). Dodatkowo, dane fotometryczne z satelity *Kepler* pozwalają na dokładne śledzenie zmian amplitud poszczególnych sygnałów w czasie, co jest pokazane na górnym panelu rys. 6 w pracy Moskalik i in. (2015), a na dolnym panelu znajdują się zmiany fazy w czasie dla jednej z obserwowanych gwiazd (KIC 5520878). Na rys. 7 w pracy Moskalik i in. (2015) przedstawiona jest zmienność amplitudy dla pewnego fragmentu danych dla wszystkich czterech gwiazd. Poza zmiennością samego sygnału  $f_x$  zaprezentowano również zmiany amplitud dla  $0.5f_x$  oraz  $1.5f_x$  (o ile były wykryte). Obserwowana zmienność jest nieregularna i różni się w zależności od gwiazdy; skala czasowa zmienności waha się od  $\sim 10$  dni do  $\sim 200$  dni. W pracy Moskalik i in. (2015) zauważono także korelację pomiędzy skalą czasową zmian amplitud a okresem pierwszego owertonu: im dłuższy okres pulsacji, tym szybsza zmienność amplitud. Także struktury w widmie częstości stają się coraz szersze wraz z rosnącym okresem pierwszego owertonu.

Analiza podobna do tej wykonanej dla gwiazd z pola *Keplera* w pracy Moskalik i in. (2015) na ogół nie jest możliwa dla danych naziemnych, gdyż wymaga doskonałej jakości gęsto próbkowanych danych. W celu wykonania analogicznej analizy wybrano zatem gwiazdę o dużej liczbie obserwacji. Dane dla dyskutowanej wyżej gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-07806, w której wykryto sygnały odpowiadające trzem ciągom, zawierają ponad 14 000 pomiarów jasności. Na Rys. 2.21 zaprezentowano zmiany amplitudy i fazy dla harmonik dwóch modów nieradialnych w

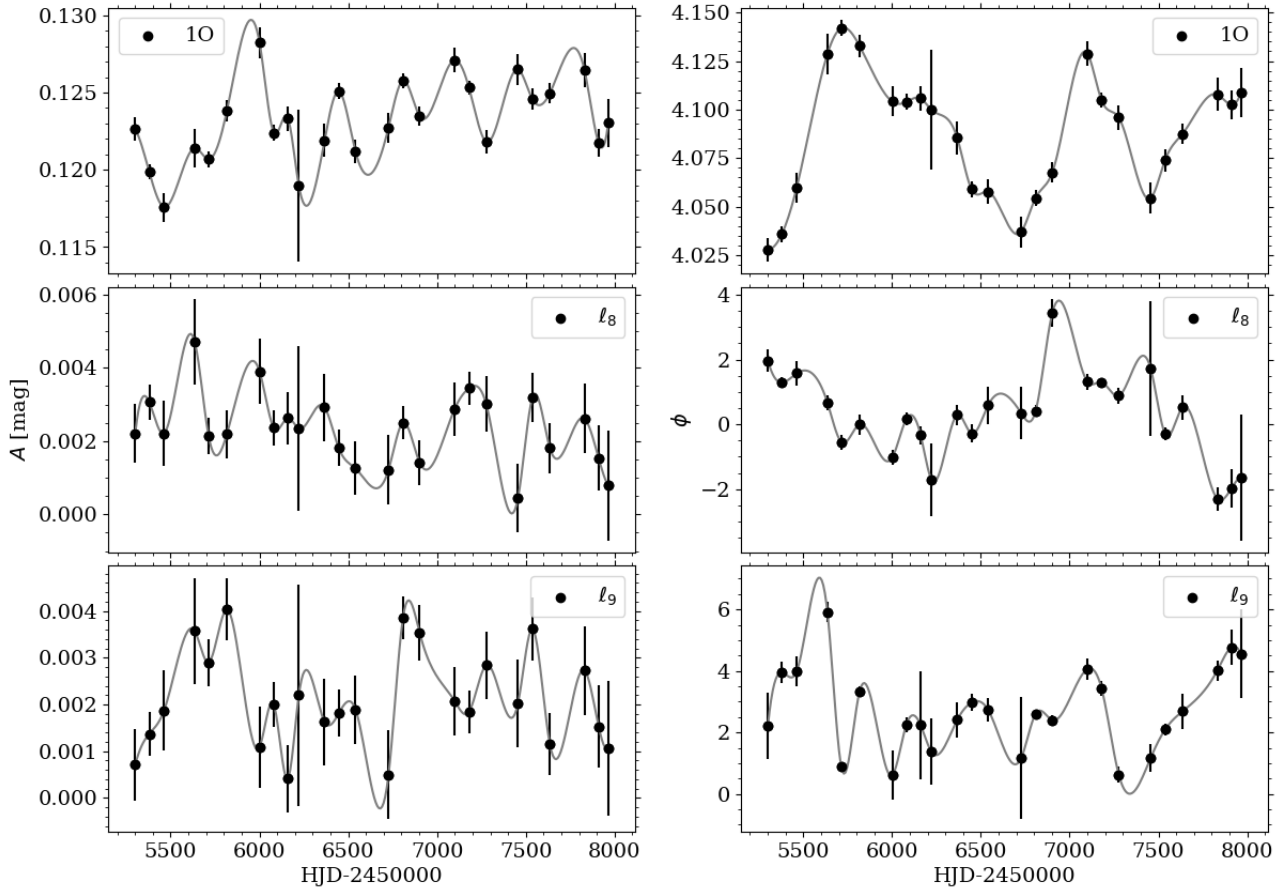


Rysunek 2.20: Widmo częstości gwiazdy RR<sub>0.61</sub> OGLE-BLG-RRLYR-07806 w funkcji stosunku okresów,  $P/P_{10}$ . Górny panel przedstawia zakres częstości odpowiadającej harmonikom modów nieradialnych, dolny panel przedstawia zakres częstości odpowiadający modom nieradialnym. Czerwona przerywana linia odpowiada czterokrotności średniego poziomu szumu z widma.

tej gwiazdzie oraz dla pierwszego owertonu. Wykres został przygotowany wykorzystując pierwszy krok w algorytmie TDP, mianowicie analizę Fouriera zależną od czasu (ang. *time-dependent Fourier analysis*) opisaną w pracy [Kovacs i in. \(1987\)](#). Na panelach po lewej stronie widać zmiany amplitudy, a po prawej zmiany fazy. Nie jest widoczna korelacja pomiędzy zmianami dla poszczególnych sygnałów, a zmiany są nieregularne zarówno w przypadku amplitud jak i faz. Wyraźnie widać też fluktuacje amplitudy i fazy dla częstości pierwszego owertonu.

### 2.3 Gwiazdy RR<sub>0.68</sub>

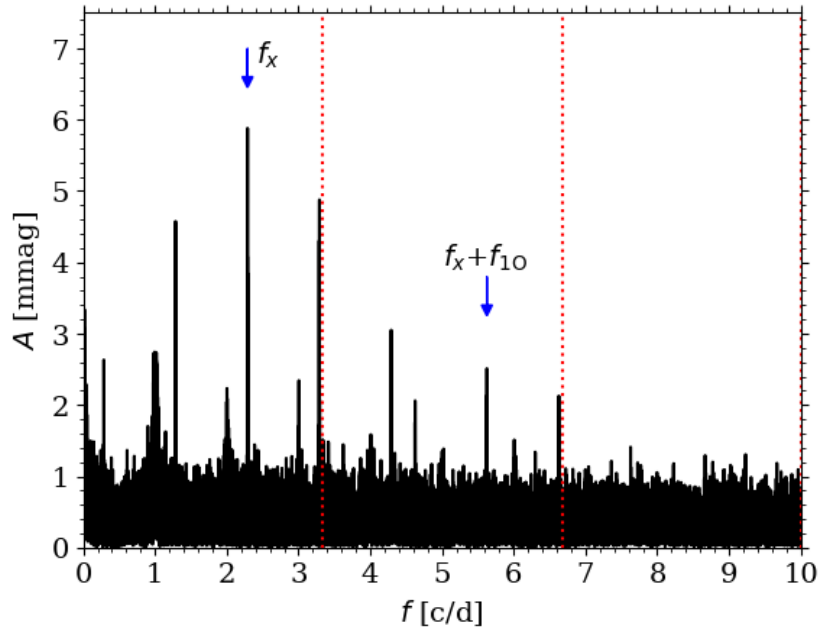
Gwiazdy należące do grupy RR<sub>0.68</sub>, czyli z dodatkowym sygnałem o okresie dłuższym od okresu pierwszego owertonu tworzącym z nim charakterystyczny stosunek okresów blisko wartości 0.686, zostały po raz pierwszy opisane w pracy [Netzel i in. \(2015a\)](#). Kilka dodatkowych gwiazd zostało znalezionych w pracy [Netzel i Smolec \(2016\)](#). Dodatkowa gwiazda pasująca do grupy została zidentyfikowana w danych z satelity *Kepler* ([Moskalik i in. 2015](#)). Łącznie, przed analizą przedstawioną w niniejszym rozdziale, znano 20 gwiazd należących do grupy RR<sub>0.68</sub> (patrz Rys. 1.14). Są to gwiazdy, w których dominującym modem pulsacji jest pierwszy owerton, czyli RRc. Dodatkowy sygnał ma okres dłuższy od okresu pierwszego owertonu i, w odróżnieniu od dodatkowych sygnałów w gwiazdach RR<sub>0.61</sub>, sygnał ten jest koherentny. Jego okres jest dłuższy od okresu modu fundamentalnego spodziewanego dla danego okresu pierwszego owertonu (co łatwo zauważyć porównując położenie gwiazd RR<sub>0.68</sub> z gwiazdami RRd na diagramie Petersena). Przykład widma częstości gwiazdy z dodatkowym sygnałem odpowia-



Rysunek 2.21: Dopasowanie częstości dla dwóch sygnałów oraz dla pierwszego owertonu do danych podzielonych na fragmenty. Na panelach po lewej stronie znajdują się zmiany amplitudy, a po prawej stronie zmiany fazy. Szara linia przedstawia dopasowaną funkcję spline, która została użyta w celu lepszej wizualizacji danych. Analizując przebieg amplitud należy wziąć pod uwagę pewne ograniczenia algorytmu TDP. Mianowicie, gdy rozważana grupa danych jest krótka, to próg detekcji może być bardzo wysoki. Natomiast algorytm do każdego sezonu dopasowuje ten sam zestaw częstości, w związku z czym wyznaczenia amplitud mogą być obarczone dużymi błędami. Wówczas otrzymana wartość to jedynie górne ograniczenie na wartość amplitudy.

dającym grupie  $RR_{0.68}$  został przedstawiony na Rys. 2.22. Wykorzystano w tym celu gwiazdę OGLE-BLG-RRLYR-05080, w której wykryto również częstość kombinacyjną pomiędzy dodatkowym sygnałem i pierwszym owertonem.

W ramach niniejszej rozprawy przeprowadziłam poszukiwania gwiazd należących do grupy  $RR_{0.68}$  w całej dostępnej próbce gwiazd RRc ze zgrubienia centralnego Galaktyki na podstawie danych OGLE-IV. Korzystając z list częstości wygenerowanych przez automatyczny skrypt opisany w rozdziale 2.1.3, wyselekcjonowałam gwiazdy, w których dodatkowe sygnały tworzą stosunek okresów z przedziału 0.67 – 0.70 z okresem pierwszego owertonu. Następnie gwiazdy te zostały przeanalizowane indywidualnie. Znalazłam 147 gwiazd  $RR_{0.68}$ , z czego 19 było już wcześniej znanych, a 128 to nowe detekcje. 87 gwiazd to pewni członkowie tej grupy. Jako kandydatki na członków grupy  $RR_{0.68}$  sklasyfikowano 41 gwiazd. W tych gwiazdach SNR dodatkowego sygnału jest niskie (blisko progu detekcji wynoszącego  $SNR=4$ ) albo jego klasyfikacja jest niepewna. Na przykład dodatkowy sygnał znajduje się blisko aliasów pozostałości po odjętym niestacjonarnym sygnale pierwszego owertonu lub aliasów sygnału w niskich czę-



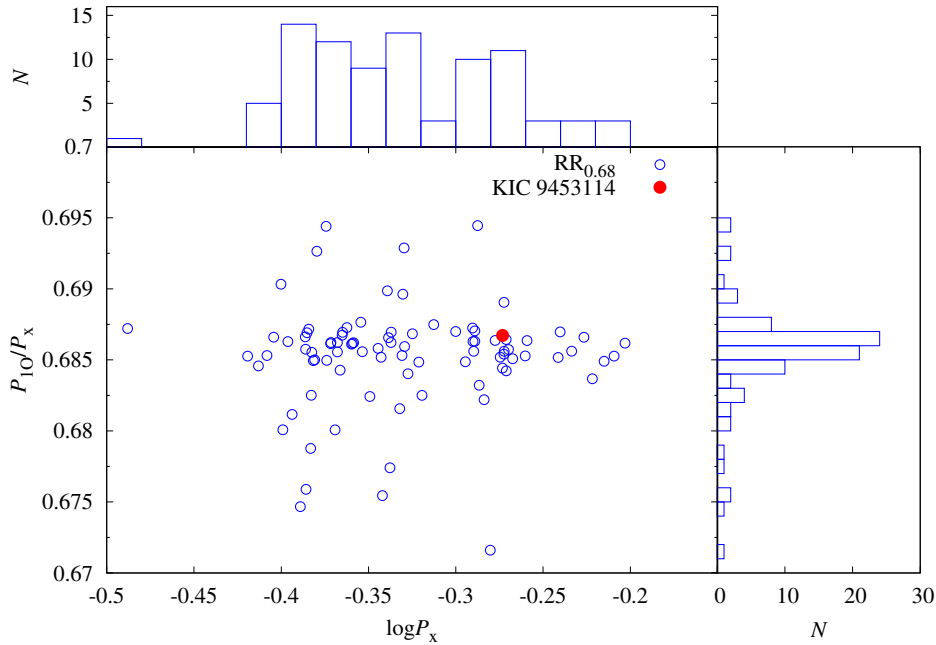
Rysunek 2.22: Widmo częstości gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-05080 po odjęciu pierwszego owertonu i jego harmonik. Ich pozycje są zaznaczone za pomocą czerwonych przerywanych linii. Dodatkowy sygnał,  $f_x$ , odpowiadający gwiazdom  $RR_{0.68}$  został zaznaczony za pomocą strzałki. Zaznaczono również sygnał odpowiadający jego kombinacji z pierwszym owertonem.

stościach. Jeśli okres dodatkowego sygnału ma wartość bliską spodziewanego okresu sygnałów instrumentalnych, również gwiazda była klasyfikowana jako kandydatka.

Częstość występowania gwiazd sklasyfikowanych jako  $RR_{0.68}$  (uwzględniając kandydatki) w stosunku do całej analizowanej próbki gwiazd RRc liczącej 11 415 gwiazd wynosi zatem 1.3%. Znalezione gwiazdy są zaznaczone na diagramie Petersena na Rys. 2.8. Zbliżenie na tę grupę wraz z histogramem stosunków okresów jest zaprezentowane na Rys. 2.23. Dodatkowo zaznaczono gwiazdę KIC 9453114 znaną z pracy Moskalik i in. (2015). Rozkład stosunków okresów ma maksimum dla wartości 0.686. Taką samą średnią wartość stosunków okresów dla tej grupy już obserwowano na podstawie znacznie mniej licznej próbki w pracy Netzel i in. (2015a), jednak w przypadku tamtej próbki rozrzut gwiazd w stosunku do średniej wartości stosunków okresów był mniejszy niż obserwowany na Rys. 2.23. Gwiazdy odstające od wartości 0.686 zostały przeanalizowane indywidualnie. Wykryte w nich sygnały są wyraźnie powyżej progu detekcji  $SNR=4$ , a także w niektórych z nich obserwuje się częstości kombinacyjne pomiędzy dodatkowym sygnałem, a częstością pierwszego owertonu. Lista gwiazd  $RR_{0.68}$  wraz z okresami i amplitudami pierwszego owertonu i dodatkowego sygnału znajduje się w dodatku, w Tab. A.2. W przeciwieństwie do sygnałów obserwowanych w gwiazdach  $RR_{0.61}$ , dodatkowy sygnał w gwiazdach  $RR_{0.68}$  jest zawsze koherentny i może być opisany za pomocą pojedynczej częstości (po odjęciu, w widmie residuów nie obserwujemy pozostałości).

W zależności od wartości okresu pierwszego owertonu, stosunek okresów wynoszący  $\sim 0.686$  może czasami odpowiadać okresowi dodatkowego sygnału około 0.5 dnia, czyli częstości bliskiej 2 c/d. W związku z tym pojawia się problem nakładania się dodatkowego sygnału na możliwe sygnały instrumentalne. Nie jest możliwe stwierdzenie, czy sygnał o częstości 2 c/d jest sygnałem instrumentalnym, czy odpowiada rzeczywistej zmienności gwiazdy. Ponieważ sygnały bliskie częstościom instrumentalnym były wykluczane podczas analizy, w rozkładzie okresów dodatkowych sygnałów w grupie  $RR_{0.68}$  (przedstawionym na górnym panelu Rys. 2.23) ist-





Rysunek 2.23: Zbliżenie na diagram Petersena na grupę gwiazd  $RR_{0.68}$ . Na prawym panelu został zaprezentowany histogram stosunków okresów dla tej grupy. Na górnym panelu przedstawiony jest histogram okresów dodatkowego sygnału.

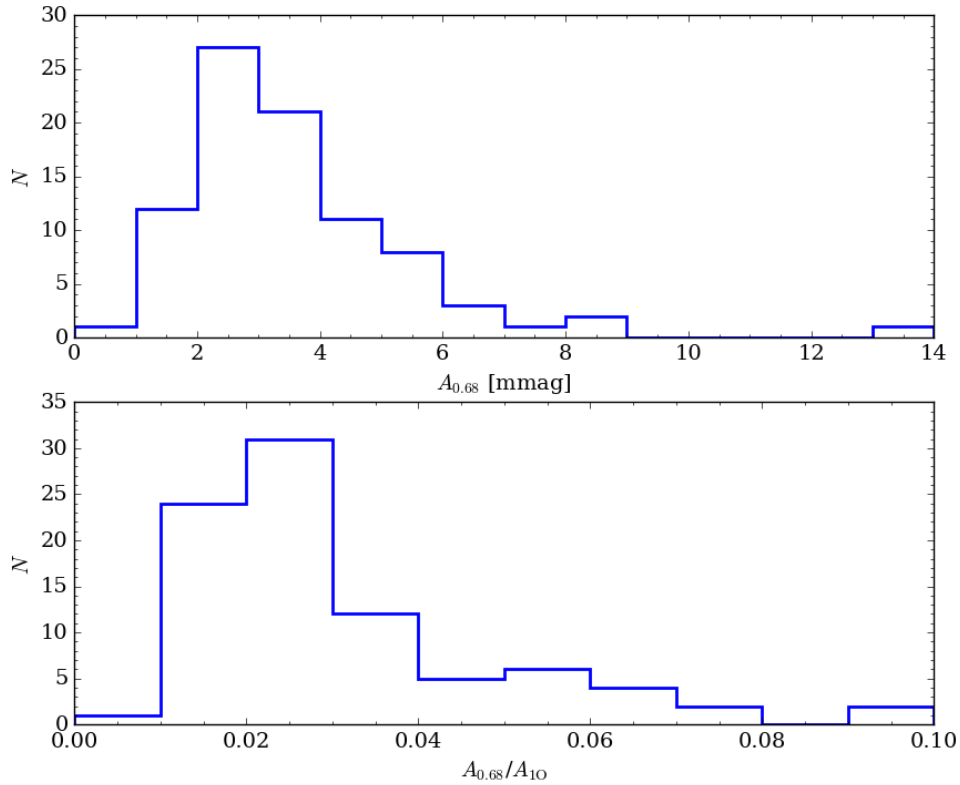
nieje przerwa dla okresów 0.5 dnia, która nie jest rzeczywistą przerwą. Na podstawie danych wykorzystanych w analizie nie jest możliwe zlikwidowanie obserwowanej przerwy w rozkładzie okresów.

Na Rys. 2.24 zaprezentowane są obserwowane amplitudy dodatkowego sygnału w gwiazdach  $RR_{0.68}$ . Najczęściej obserwowane są amplitudy od 2 do 4 mmag. W pojedynczych gwiazdach  $RR_{0.68}$  obserwowane są amplitudy wyższe niż 6 mmag. Na tym samym rysunku zaprezentowany jest także rozkład stosunku amplitudy dodatkowego sygnału do amplitudy pierwszego oweronu. Dla większości gwiazd amplituda dodatkowego sygnału stanowi około 2 – 3% amplitudy pierwszego oweronu.

Kilka gwiazd spośród 147 gwiazd  $RR_{0.68}$  jest szczególnie interesujących. W trzech gwiazdach: OGLE-BLG-RRLYR-11457, OGLE-BLG-RRLYR-11615 i OGLE-BLG-RRLYR-20374 znaleziono jednocześnie sygnały odpowiadające grupie  $RR_{0.68}$  jak i grupie  $RR_{0.61}$ . Widmo częstości jednej z nich, OGLE-BLG-RRLYR-11457, jest pokazane na Rys. 2.25. Pierwszą znaną gwiazdą należącą jednocześnie do obu grup była gwiazda KIC 9453114 analizowana w pracy Moskalik i in. (2015) na podstawie danych z satelity *Kepler* (wówczas grupa  $RR_{0.68}$  nie była jeszcze wyróżniona). Wyjaśnienie natury gwiazd z grupy  $RR_{0.68}$  stanowi wyzwanie, co będzie bardziej szczegółowo przedyskutowane w dalszej części rozdziału.

Gwiazda OGLE-BLG-RRLYR-11167 jest interesująca, ponieważ jest to jedyna gwiazda, w której obserwuje się jednocześnie dwa sygnały odpowiadające stosunkom okresów charakterystycznym dla gwiazd  $RR_{0.68}$ . Pierwszy sygnał tworzy stosunek okresów z okresem pierwszego oweronu 0.68271, a drugi tworzy stosunek okresów 0.68106. Dodatkowo w OGLE-BLG-RRLYR-11167 jest obserwowany efekt Błażki o okresie modulacji  $12 \pm 1$  dnia i szczególnie wysokiej względnej amplitudzie modulacji (62%). Separacja obu dodatkowych częstości odpowiada jednak dłuższemu okresowi 162 dni. Efekt Błażki w gwiazdach RR Lutni z dodatkowymi sygnałami jest przedyskutowany w rozdziale 2.4.

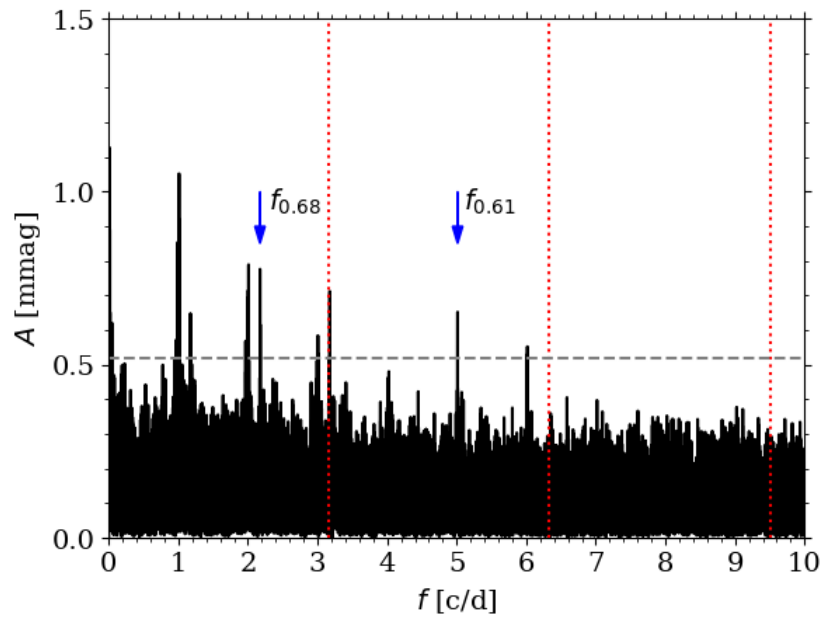




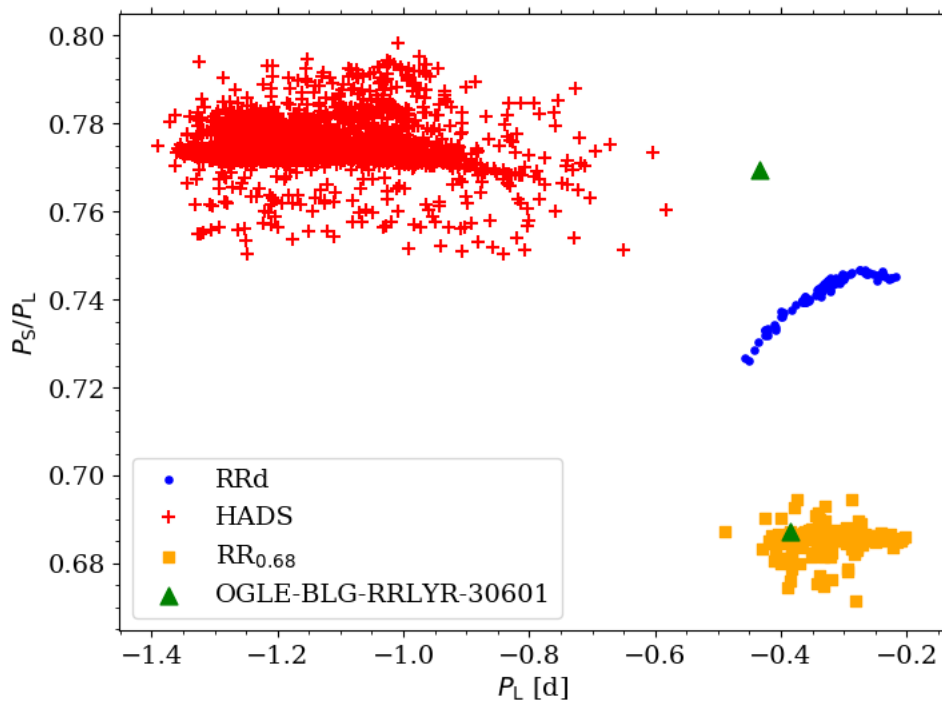
Rysunek 2.24: Górny panel: histogram amplitud dodatkowego sygnału dla gwiazd  $RR_{0.68}$ . Dolny panel: histogram stosunków amplitudy dodatkowego sygnału do amplitudy pierwszego owertonu.

Kolejną ciekawą gwiazdą jest OGLE-BLG-RRLYR-30601, w której, poza dwoma sygnałami, z których jeden odpowiada częstotliwości pierwszego owertonu ( $f_{10}$ ), a drugi odpowiada sygnałowi  $RR_{0.68}$  ( $f_{0.68}$ ), w widmie częstotliwości widoczny jest trzeci niezależny sygnał,  $f_z$ . Jego częstota jest krótsza od częstoty pierwszego owertonu i dłuższa od częstoty sygnału  $f_{0.68}$ . Stosunek okresów trzeciej częstoty do okresu pierwszego owertonu wynosi około 0.7695. Jest zatem wyższy niż stosunek okresów dla gwiazd RRd. Pozycja gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-30601 jest zaprezentowana na diagramie Petersena na Rys. 2.26. Dla porównania pokazano gwiazdy RRd dla zgrubienia centralnego Galaktyki z danych OGLE-IV (Soszyński i in. 2014) oraz gwiazdy HADS pulsujące jednocześnie w modzie fundamentalnym i pierwszym owertonowym znalezione przeze mnie w danych OGLE-IV dla zgrubienia centralnego Galaktyki (patrz rozdział 5). Gwiazda OGLE-BLG-RRLYR-30601 znajduje się powyżej ciągu RRd i na długookresowym przedłużeniu ciągu dwumodalnych HADS. Jeżeli klasyfikacja tej gwiazdy jako HADS jest poprawna, to byłaby to pierwsza gwiazda  $\delta$  Scuti z tym sygnałem, a także pierwsza gwiazda pulsująca w dwóch modach radialnych jednocześnie z tym dodatkowym sygnałem. Jednak klasyfikacja jest niepewna, ponieważ okres pierwszego owertonu jest dłuższy niż typowe wartości okresów dla gwiazd  $\delta$  Scuti, a także kształt krzywej blasku odpowiada typowym dla gwiazd RRc, co zostało sprawdzone na podstawie współczynników Fouriera.

Nie istnieje obecnie wytłumaczenie natury sygnałów obserwowanych w gwiazdach  $RR_{0.68}$ . Wiadomo, że nie mogą one odpowiadać pulsacjom w modach radialnych, ponieważ okres dodatkowego sygnału jest dłuższy niż możliwy okres modu fundamentalnego. Częstota dodatkowego modu jest też zbyt wysoka, aby uznać, że obserwowana zmienność może być spowodowana przez rotację. Dodatkowa częstota musi być zatem spowodowana wzbudzonym dodatkowym modem

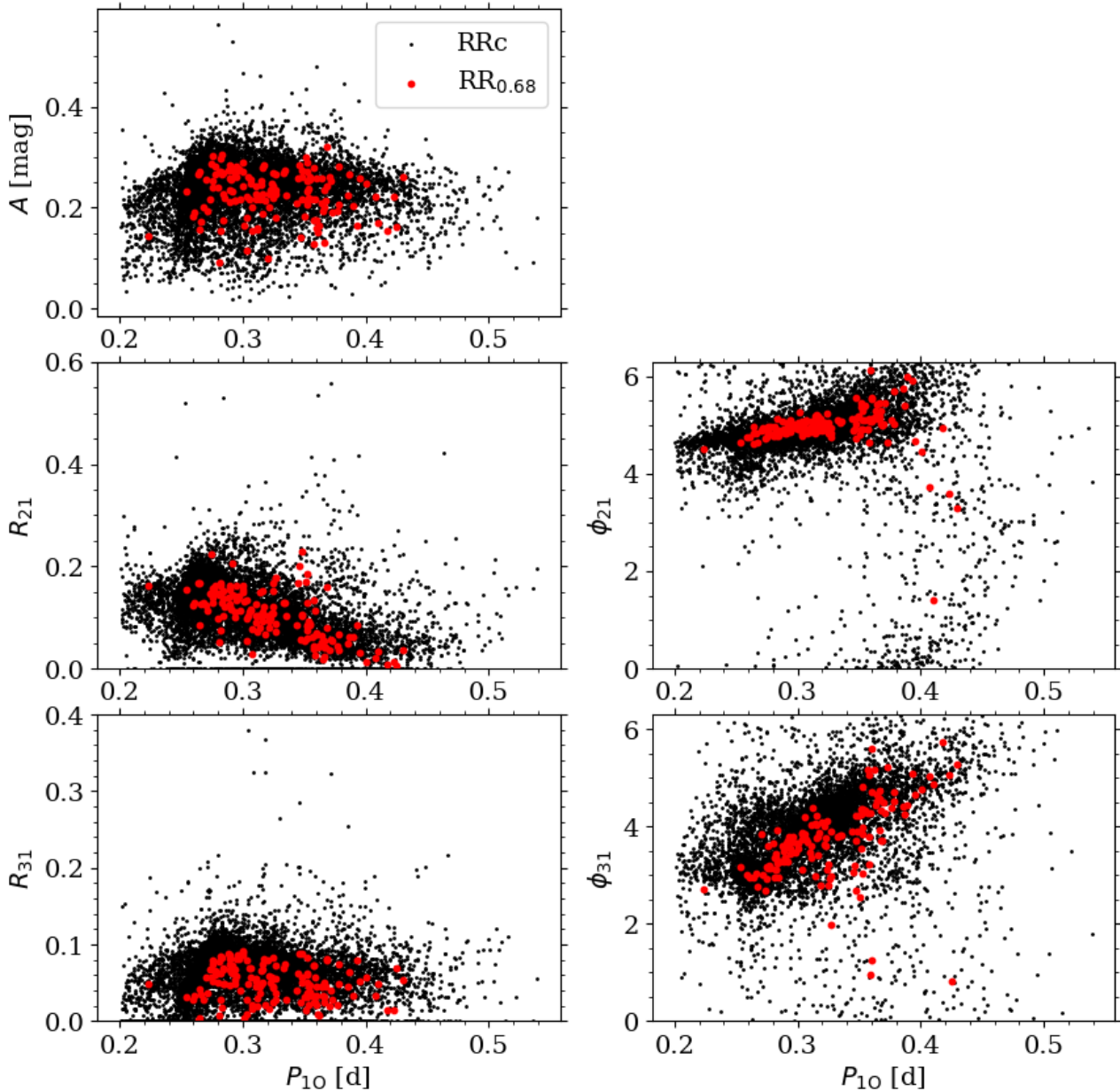


Rysunek 2.25: Widmo częstotliwości OGLE-BLG-RRLYR-11457 po usunięciu pierwszego owertonu i jego harmonik, których pozycje są zaznaczone za pomocą czerwonych kropkowanych linii. Szara kreskowana linia oznacza czterokrotną wartość średniego poziomu szumu. Dodatkowe sygnały odpowiadające grupom  $RR_{0.61}$  oraz  $RR_{0.68}$  są zaznaczone strzałkami.



Rysunek 2.26: Położenie gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-30601 na diagramie Petersena.

pulsacji, przy czym mod ten nie może być czystym modem ciśnieniowym, przy założeniu, że klasyfikacja tych gwiazd jako gwiazd RR Lutni jest poprawna. W celu sprawdzenia poprawności klasyfikacji tych gwiazd jako gwiazd RRc, porównałam współczynniki Fouriera dla krzywych blasku gwiazd RR<sub>0.68</sub> ze współczynnikami Fouriera dla całej populacji gwiazd RRc na podstawie danych OGLE dla zgrubienia centralnego Galaktyki. Wartości współczynników Fouriera dla gwiazd RR<sub>0.68</sub> pokrywają się z obserwowanymi wartościami dla gwiazd RRc. Na Rys. 2.27 przedstawiono pełne amplitudy zmian blasku dla gwiazd RRc i RR<sub>0.68</sub> w funkcji okresu pierwszego owertonu, tzw. diagram Baileya oraz wykresy współczynników Fouriera w funkcji okresu pierwszego owertonu. Gwiazdy RR<sub>0.68</sub> nie odbiegają swoim położeniem od gwiazd RRc.



Rysunek 2.27: Porównanie amplitud i współczynników Fouriera gwiazd RRc i RR<sub>0.68</sub>. Górny panel: pełne amplitudy gwiazd RRc ze zgrubienia centralnego Galaktyki na podstawie danych OGLE (czarne punkty) oraz pełne amplitudy znalezionych gwiazd RR<sub>0.68</sub> w funkcji okresu pierwszego owertonu. Kolejne panele przedstawiają współczynniki  $R_{21}$ ,  $\phi_{21}$ ,  $R_{31}$  i  $\phi_{31}$  w funkcji okresu pierwszego owertonu.

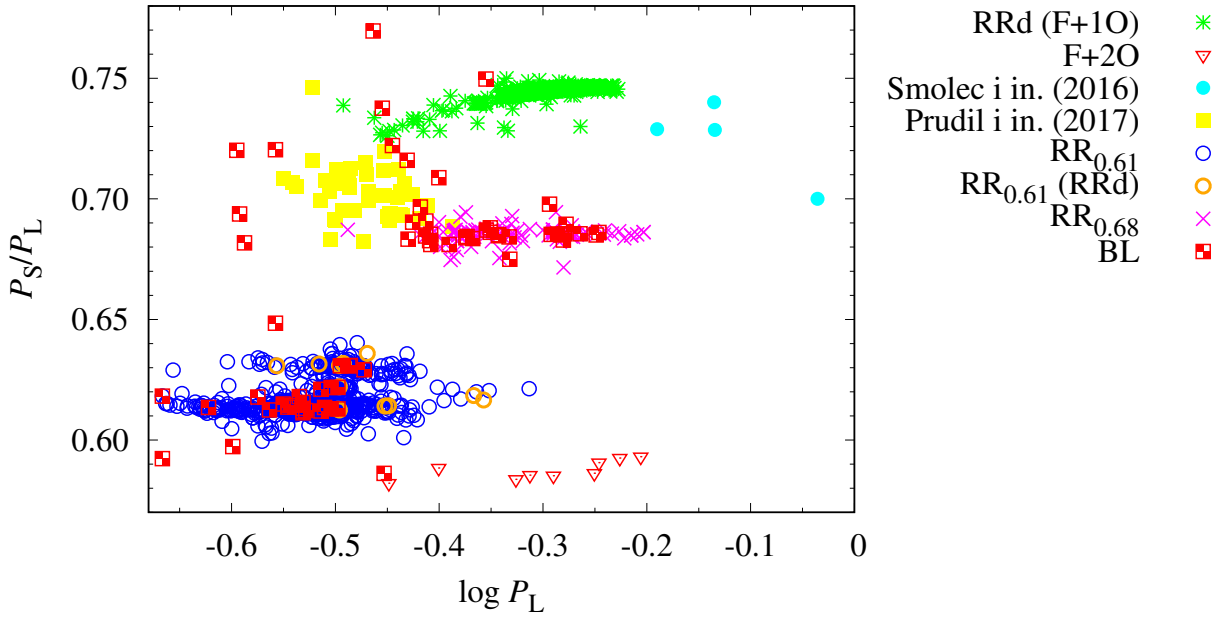
Jedyną pracą, w której podjęto próbę wyjaśnienia natury gwiazd z grupy  $RR_{0.68}$  jest praca [Dziembowski \(2016\)](#). Na rys. 1 w tej pracy pokazane są niestabilne mody pulsacji dla modelu gwiazdy RR Lutni. Na jego podstawie widać, że w gwieździe RR Lutni istnieją niestabilne mody o częstościach niższych od częstości modu fundamentalnego. Najniższą częstość w modelu z pracy [Dziembowski \(2016\)](#) osiąga mod dipolowy, który już musi być modem o charakterze mieszanym, czyli o charakterze modu ciśnieniowego w otoczce gwiazdy i o charakterze modu grawitacyjnego we wnętrzu. Jednak nawet mod o najniższej częstości w rozważanym modelu nie ma odpowiednio niskiej częstości, aby otrzymać stosunek okresów  $\sim 0.68$ . Kolejnym problemem związanym z wytłumaczeniem sygnału za pomocą modów dipolowych jest fakt, że tempo ich wzbudzania jest o trzy rzędy wielkości niższe niż dla modu fundamentalnego. Nie jest jasne, dlaczego ten mod miałby być wzbudzony, a stabilne miałyby być mody o wyższych tempach narastania. W tej samej pracy zaproponowano również inne wyjaśnienie natury obserwowanych sygnałów. Taki stosunek okresów jest odtworzony dla stosunku okresów radialnego modu fundamentalnego i pierwszego owertonu dla modeli gwiazd o masach z przedziału  $0.225 - 0.24 M_{\odot}$ . Wówczas takie obiekty nie są gwiazdami RRc, a olbrzymami, które straciły swoją otoczkę. Jeden obiekt tego typu został znaleziony w pracy [Pietrzyński i in. \(2012\)](#). Jest to układ podwójny, w którym jeden ze składników był sklasyfikowany jako gwiazda RR Lutni na podstawie okresu pulsacji i kształtu krzywej blasku. Dzięki obecności w zaćmieniowym układzie podwójnym możliwe było wyznaczenie jego masy, która wynosi  $0.261 M_{\odot}$ . Pomimo tego, że obiekt ten na podstawie charakterystyki pulsacji jest podobny do gwiazd RR Lutni, struktura wewnętrzna gwiazdy jest inna niż dla standardowych gwiazd RR Lutni. Podczas ewolucji w układzie podwójnym, jeden ze składników utracił swoją otoczkę i jest w trakcie ewolucji w kierunku gorących podkarłów przecinając klasyczny pas niestabilności. Tempo ewolucji takiego obiektu również jest znacznie szybsze niż dla gwiazd RR Lutni, co oznacza, że występują one relatywnie rzadko. Obiekt ten został nazwany BEP (*binary evolution pulsator*). Występowanie BEPów w klasycznym pasie niestabilności zostało zbadane w pracy [Karczmarek i in. \(2017\)](#), w której wykorzystano narzędzia do syntezy populacji. Na ich podstawie oszacowano, że 0.4% gwiazd RR Lutni może być w rzeczywistości obiektami podobnymi do BEP, co sugeruje, że spośród 11563 obiektów zbadanych w niniejszej rozprawie, spodziewanych jest około 50 BEPów.

W kontekście jednego znanego obiektu typu BEP, interpretacja grupy  $RR_{0.68}$  jako grupy olbrzymów w układach podwójnych, które utraciły swoją otoczkę i pulsują w dwóch modach radialnych, jest bardzo atrakcyjna. Jednak ta interpretacja wzajemnie się wyklucza z interpretacją grupy  $RR_{0.61}$  dla czterech gwiazd, które jednocześnie należą do obu grup. Interpretacja grupy  $RR_{0.61}$  opiera się na założeniu, że gwiazdy te są prawdziwymi gwiazdami RR Lutni o typowych masach.

## 2.4 Występowanie dodatkowych sygnałów a efekt Błażki

Efekt Błażki, czyli kwaziokresowa modulacja amplitudy i/lub fazy pulsacji ([Błażko 1907](#)), jest zjawiskiem często spotykanym w gwiazdach RR Lutni. W szczególności, w gwiazdach RRab częstość występowania efektu Błażki może osiągać nawet 47% ([Jurcsik i in. 2009](#)). W gwiazdach RRc, na podstawie danych OGLE-IV, oszacowałam częstość występowania efektu Błażki na 5.6% ([Netzel i in. 2018](#)).

Na podstawie wcześniejszych wyników nie było jasne, czy efekt Błażki może występować w gwiazdach z dodatkowymi modami nieradialnymi. Wśród 4 obserwowanych gwiazd RRc z pół K2 przeanalizowanych przez [Molnár i in. \(2015\)](#), 3 z nich należą do grupy  $RR_{0.61}$ . Jedyna gwiazda, która nie należy do tej grupy pokazuje modulację amplitudy i fazy, znaną jako efekt Błażki. Na podstawie danych teleskopów kosmicznych wnioskowano zatem, że  $RR_{0.61}$  są powszechnym



Rysunek 2.28: Diagram Petersena dla wielomodalnych gwiazd RR Lutni. Za pomocą czerwonych kwadratów zaznaczono pozycje gwiazd z dodatkowymi sygnałami, w których jednocześnie występuje efekt Błażki, pochodzące z pracy [Netzel i in. \(2018\)](#).

zjawiskiem wśród owertonowych RR Lutni, poza tymi, które wykazują efekt Błażki.

Dzięki przeprowadzeniu pełnej analizy gwiazd RRc z pól zgrubienia centralnego Galaktyki pod kątem poszukiwania gwiazd  $RR_{0.61}$  oraz  $RR_{0.68}$ , ale także pod kątem występowania efektu Błażki, pokazałam, że oba zjawiska nie wykluczają się jak sugerowały wcześniejsze wyniki. Znalazłam 19 gwiazd  $RR_{0.61}$  oraz 24 gwiazd  $RR_{0.68}$ , w których jednocześnie występuje efekt Błażki. Na Rys. 2.28 gwiazdy z efektem Błażki i wykrytymi dodatkowymi sygnałami są zaznaczone na diagramie Petersena.

Częstość występowania efektu Błażki w stosunku do całej próbki 147 gwiazd  $RR_{0.68}$  wynosi 16%. Częstość występowania gwiazd z efektem Błażki w stosunku do 949 gwiazd  $RR_{0.61}$  wynosi jedynie 2%. Na podstawie analizowanych danych widać zatem, że częstość występowania efektu Błażki jest wyższa dla gwiazd  $RR_{0.68}$ , niż dla gwiazd  $RR_{0.61}$ , a także wyższa niż częstość występowania efektu Błażki w gwiazdach RRc w ogóle.

# Spektroskopowa detekcja modów nieradialnych w Cefeidach klasycznych

Obserwacje zmienności linii widmowych pozwalają na wykrywanie zmienności w gwiazdach oraz na identyfikację modów pulsacji. [Ledoux \(1951\)](#) po raz pierwszy zaproponował, że zmiany w liniach absorpcyjnych w  $\beta$  Canis Majoris są związane z pulsacjami nieradialnymi. Porównanie obserwowanych zmian linii do przewidywań teoretycznych dla tej gwiazdy zostało wykorzystane przez [Osaki \(1971\)](#) i [Smith \(1977\)](#) w celu identyfikacji modów pulsacji. Przewagą obserwacji spektroskopowych nad fotometrycznymi jest możliwość wykrywania modów o wysokich stopniach, a co za tym idzie o niskich amplitudach. Detekcja modów o wysokich stopniach w danych fotometrycznych wymaga doskonałych danych o niskim progu detekcji.

Wykorzystanie serii widm do identyfikacji modów, zarówno stopnia modu oraz jego rzędu azymutalnego, jest szeroko wykorzystywane np. dla gwiazd typu  $\delta$  Scuti (patrz np. [Mantegazza i Poretti 2002](#)), ale także dla innych gwiazd pulsujących w modach nieradialnych. Metody wykorzystywane do spektroskopowej identyfikacji modów, ich możliwości oraz ograniczenia są przedyskutowane przez [Uytterhoeven \(2014b\)](#). Gwiazdy RR Lutni oraz Cefeidy klasyczne są częstym celem obserwacji spektroskopowych, służących głównie badaniu dynamiki atmosfery, badaniu własności kinematycznych czy wyznaczeniu ich parametrów fizycznych (patrz np. [Preston 1959](#); [Butler i in. 1996](#); [Nemec i in. 2013](#); [Pilecki i in. 2015](#)). Zmienność profili widmowych także była obserwowana i analizowana zarówno dla gwiazd RR Lutni (patrz np. [Chadid i in. 1999](#); [Kolenberg i in. 2000, 2003](#)) oraz dla Cefeid klasycznych ([Kovtyukh i in. 2003](#)).

Celem poniższego rozdziału jest zbadanie, czy obserwowane dodatkowe mody w Cefeidach klasycznych, które zgodnie z modelem przedstawionym w pracy [Dziembowski \(2016\)](#) są modami nieradialnymi o stopniach 7, 8 lub 9 (patrz Rys. 1.13 oraz rys. 3 w pracy [Dziembowski 2016](#)), są możliwe do wykrycia przez analizę zmienności linii widmowych. Analogiczne mody obserwuje się fotometrycznie także w gwiazdach RR Lutni (patrz rozdział 2). Cefeidy są jednak jaśniejsze i mają dłuższe okresy pulsacji, przez co są prostszym celem obserwacji spektroskopowych. Dlatego w tym rozdziale rozważane będą Cefeidy klasyczne. Możliwość wykrycia zmienności związanej z modami o relatywnie wysokich stopniach, ale małych amplitudach, byłaby pierwszym krokiem w celu ich identyfikacji. Identyfikacja pozwoliłaby z kolei na potwierdzenie bądź zaprzeczenie modelowi z pracy [Dziembowski \(2016\)](#). Ten rozdział ma na celu odpowiedzenie na pytanie: *Jeśli dodatkowe mody są rzeczywiście modami o relatywnie wysokich stopniach 7, 8 lub 9, czy mogą zostać one znalezione w danych spektroskopowych?* W tym celu przeprowadziłam analizę symulacji serii syntetycznych profili linii widmowych i zbadalam możliwości detekcji tychże modów.



### 3.1 Syntetyczne profile linii

W celu przetestowania możliwości detekcji modów nieradialnych o stopniach 7–9 w Cefeidach klasycznych wykorzystano syntetyczne profile linii widmowych policzone ogólnodostępnym programem FAMIAS (*Frequency Analysis and Mode Identification for AsteroSeismology*, Zima 2008). FAMIAS zawiera narzędzia służące między innymi do syntezy profili linii, a także do analizy częstotliwości na podstawie zmian profili linii. Oba narzędzia zostały wykorzystane w tej pracy. W pierwszym kroku obliczono serie syntetycznych linii widmowych dla pulsacji odpowiadających pulsacjom w modzie radialnym i modzie nieradialnym jednocześnie. Następnie wykorzystano narzędzia służące do poszukiwania okresowości w symulowanych danych.

Wygenerowanie serii profili linii widmowych za pomocą programu FAMIAS wymaga podania zestawu parametrów, które są podzielone na cztery kategorie. Pierwsza z nich to parametry fizyczne gwiazdy, druga to parametry modów pulsacji, trzecia odpowiada parametrom linii widmowej. Ostatnia kategoria zawiera parametry "techniczne" takie jak, między innymi, próbkowanie czasowe czy liczbę segmentów w siatce na powierzchni gwiazdy. Ustawienia dla wszystkich parametrów zostaną szczegółowo przedyskutowane w dalszej części rozdziału.

#### 3.1.1 Syntetyczne profile linii widmowych

Profile widmowe w programie FAMIAS liczone są przy założeniu, że model gwiazdy jest w równowadze hydrostatycznej, sferycznie symetryczny oraz nie zmieniony przez rotację i obecność pola magnetycznego. Równania opisujące adiabaticzne pulsacje gwiazdy to równania ciągłości, ruchu, energii oraz Poissona. Rozwiązując równania otrzymuje się składowe wektora przesunięć Lagrange'a  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_r, \xi_\theta, \xi_\phi)$ . Pole prędkości związanych z pulsacjami gwiazdy jest wówczas wyrażone jako pochodna po czasie wektora przesunięć:

$$\mathbf{v}_{\text{puls}} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t}. \quad (3.1)$$

W przypadku uwzględnienia rotacji gwiazdy, pole prędkości składa się ze składowej związanej z pulsacjami oraz z rotacją:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{puls}} + \mathbf{v}_{\text{rot}}. \quad (3.2)$$

Pole prędkości liczone jest w siatce składającej się z poszczególnych segmentów widocznej powierzchni gwiazdy.

W FAMIAS rotacja nie powoduje zniekształcenia gwiazdy, zatem mimo rotacji symetria sferyczna jest zachowana. Wpływ rotacji jest uwzględniony w formie poprawki pierwszego rzędu związanej z siłą Coriolisa. Poprawka ta jest proporcjonalna do stosunku  $\Omega/\omega$ , gdzie  $\Omega$  to częstość kątowna rotacji, a  $\omega$  to częstość kątowna pulsacji. Wpływ rotacji na częstość pulsacji dla wolno rotujących gwiazd opisuje wzór Ledoux:

$$\omega_{n,\ell,m} = \omega_{n,\ell,0} + mC_{n,\ell}\Omega, \quad (3.3)$$

gdzie  $C_{n,\ell}$  jest stałą zależącą od radialnego rzędu modu  $n$ , stopnia modu  $\ell$  oraz od struktury gwiazdy. FAMIAS nadaje się jedynie do symulacji gwiazd, dla których spełniona jest zależność  $\Omega/\omega < 0.5$ . Nie będzie on dobrym narzędziem do symulowania szybko rotujących gwiazd ani do takich, które pulsują w niskich częstościach (mody g). Te ograniczenia nie stosują się do Cefeid klasycznych, zatem w ich przypadku FAMIAS może zostać wykorzystany.

Ruchy w atmosferze wpływają na kształt linii widmowych. Obserwowane linie są poszerzone ze względu na występowanie różnych mechanizmów. Mechanizmy działające w skali mikroskopowej, takie jak poszerzenie atomowe, termiczne oraz ciśnieniowe, powodują powstanie profilu

linii opisywanego profilem Voigta. W programie FAMIAS jest on jednak opisany profilem Gaussa, co jest równoważne z zaniedbaniem poszerzenia ciśnieniowego i atomowego i jest dobrym przybliżeniem dla silnych linii metali.

Wkład do linii widmowej poszczególnych segmentów na obserwowanej powierzchni gwiazdy jest proporcjonalny do natężenia promieniowania z ich powierzchni rzutowanego na kierunek do obserwatora. Istotny jest wpływ pociemnienia brzegowego, które jest uwzględnione wykorzystując wzór:

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - \sum_{k=1}^4 a_k (1 - \mu^{k/2}), \quad (3.4)$$

gdzie  $\mu = \cos \theta$ ,  $\theta$  to kątowa odległość od bieguna, a  $a_k$  to  $k$ -ty współczynnik prawa pociemnienia brzegowego (Claret 2000).

Wpływ pulsacji oraz rotacji opisany jest za pomocą pola prędkości rzutowanego na kierunek do obserwatora. Pole prędkości powoduje przesunięcia Dopplera odpowiednie dla każdego segmentu obserwowanej powierzchni gwiazdy.

Uwzględniając wszystkie powyższe efekty i założenia, profil linii w segmencie powierzchni o prędkości radialnej względem obserwatora,  $V$ , opisuje wzór (Zima 2008):

$$I(v, T_{\text{eff}}, \log g) = \left(1 + \frac{\delta F}{F}\right) \left[1 - \frac{W_{\text{int}}(T_{\text{eff}})}{\sigma \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{v-v}{\sigma}\right)^2}\right], \quad (3.5)$$

gdzie  $v$  to prędkość wzdłuż profilu linii,  $F$  to strumień z danego elementu powierzchni,  $W_{\text{int}}(T_{\text{eff}})$  opisuje zmiany szerokości równoważnej linii związane ze zmianą temperatury efektywnej,  $\sigma$  to szerokość profilu niezaburzonego. Ostateczny profil linii jest sumą po widocznych segmentach powierzchni ważoną ze względu na wielkość rzutowanej powierzchni. Zmiany szerokości równoważnej ze względu na lokalne zmiany temperatury zależą od rozważanej linii, a w szczególności sposobu jej powstawania i temperatury w strefie, w której powstaje. Zmiany szerokości równoważnych zostały zaniedbane w poniższej analizie profili linii, co jest także często spotykanym podejściem w literaturze (patrz np. Aerts i in. 1992). Syntetyczne profile linii policzone za pomocą programu FAMIAS są znormalizowane do poziomu kontinuum, wobec czego wartości amplitud nie mają jednostek.

### 3.1.2 Parametry gwiazdy

Symulacje linii zostały przeprowadzone na przykładzie reprezentatywnego obiektu. Wybraną gwiazdą jest Cefeida klasyczna pulsująca w pierwszym owertonie OGLE-LMC-CEP-2532 (Pilecki i in. 2015). Jest to składnik zaćmieniowego układu podwójnego znajdującego się w Wielkim Obłoku Magellana, który był obserwowany zarówno spektroskopowo jak i fotometrycznie. W dostępnych obserwacjach fotometrycznych nie wykryto dodatkowego sygnału odpowiadającego grupie Cep<sub>0.61</sub>, co może wynikać z amplitudy dodatkowego modu poniżej progu detekcji. Gwiazda ta została wybrana, ponieważ dzięki przynależności do układu podwójnego ma dokładnie wyznaczone parametry fizyczne (tab. 6 w pracy Pilecki i in. 2015). Masa Cefeidy wynosi  $3.9 \pm 0.1 M_{\odot}$ , promień to  $28.95 \pm 1.4 R_{\odot}$ , temperatura  $6345 \pm 150$  K,  $\log g$  wynosi  $2.11 \pm 0.04$  ( $g$  w jednostkach cgs), a metaliczność  $[\text{Fe}/\text{H}]$  wynosi  $-0.45$  dex. W programie FAMIAS najniższa możliwa wartość  $\log g$  to 2.5, więc taka wartość, jako najbliższa obserwowanej, została założona w obliczeniach. Wartość  $\log g$  jest wykorzystywana w celu otrzymania wartości pociemnienia brzegowego. Sprawdzone zatem, na ile wartości  $\log g$  wpływają na obliczenia, przeprowadzając symulacje dla kilku wartości z przedziału 2.5 – 3.0. Ponieważ różnice są znikome, założenie najbliższej wartości  $\log g = 2.5$  jest uzasadnione. Ponadto, takie wartości są obserwowane dla Cefeid klasycznych (patrz np. Pilecki i in. 2018).

W pracy [Pilecki i in. \(2015\)](#) obserwowana wartość  $v \sin i$  nie została wyznaczona. Korzystając z relacji pomiędzy  $v \sin i$  a okresem pulsacji, podanej w pracy [Nardetto i in. \(2006\)](#),  $v \sin i = -11.5 \log P + 19.8$  (równanie 8), otrzymano wartość 16.2 km/s. Jest ona zgodna z typowymi wartościami  $v \sin i$  dla Cefeid pulsujących w pierwszym owertonie wynoszącymi około 20 km/s ([Kraft i in. 1959](#)) i taką wartość wykorzystano w symulacjach. Inklinacja dla zaćmieniowego układu podwójnego wynosi  $85.97^\circ$ , co w pierwszym przybliżeniu może być również uznane za inklinację gwiazdy. W rozprawie przeprowadzono symulacje dla różnych wartości inklinacji. Jeżeli inklinacja nie jest określona, oznacza to, że w danej symulacji użyto wartości  $45^\circ$ .

### 3.1.3 Parametry modów pulsacji

W każdej symulacji dodawano dwa mody pulsacji: radialny pierwszy owerton, dla którego częstość jest znana na podstawie danych fotometrycznych (0.49132 c/d, [Pilecki i in. 2018](#)), a  $\ell, m = 0$ , oraz mod nieradialny o stopniu  $\ell$  wynoszącym 7, 8 albo 9. Harmoniki modu radialnego i nieradialnego oraz częstości kombinacyjne pomiędzy nimi nie były dodawane na etapie symulacji. Ze względu na to, że zmiany linii mają charakter niesinusoidalny, harmoniki również będą obserwowane podczas analizy częstości w symulacjach (patrz np. rys. 8 z [Gies 1991](#)). Amplituda prędkości radialnych podczas pulsacji w modzie pierwszym owertonowym w symulowanym obiekcie wynosi 23.6 km/s ([Pilecki i in. 2018](#)). Poprawiając na czynnik projekcji (*projection factor*, pozwalający na przeliczenie obserwowanych prędkości radialnych pulsacji do rzeczywistych prędkości pulsacji), dla którego założono  $p = 1.2$  ([Pilecki i in. 2015](#)), w symulacjach przyjęto amplitudę prędkości pulsacji na 28.2 km/s. Częstość modu nieradialnego została przyjęta odpowiednio dla każdego z możliwych stopni modu, w taki sposób aby odtworzyć spodziewany stosunek okresów w badanym obiekcie. Dla stopnia  $\ell = 7$  przyjęto 0.38686 c/d, co odpowiada stosunkowi okresów harmoniki modu i pierwszego owertonu  $\sim 0.635$ . Dla stopnia  $\ell = 8$  przyjęto 0.39622 c/d (stosunek okresów  $\sim 0.62$ ), a dla stopnia  $\ell = 9$  przyjęto 0.40272 c/d (stosunek okresów  $\sim 0.61$ ). W oszacowaniu amplitudy prędkości dla modu nieradialnego wykorzystano równanie 8 z pracy [Dziembowski \(2012\)](#):

$$\frac{A_v}{A_I} = 0.047 \frac{R}{P_{1O}} [b_{E,\ell} \ell (\ell + 1)]^{-1} [\text{km/s/mm}^2], \quad (3.6)$$

gdzie  $A_v$  to amplituda prędkości pulsacji w km/s,  $A_I$  to obserwowana amplituda w filtrze  $I$ , która została ustalona na 2 mmag na podstawie obserwowanych wartości w innych Cefeidach ([Smolec i Śniegowska 2016](#)),  $R$  to promień,  $P_{1O}$  to okres pierwszego owertonu dla Cefeidy, a  $b_{E,\ell}$  to współczynnik pociemnienia brzegowego w przybliżeniu Eddingtona dla zadanego stopnia modu. Założono tę samą wartość amplitudy w filtrze  $I$  dla wszystkich trzech stopni modów. Na podstawie równania 3.6 przyjęto wartości amplitudy prędkości 10.19 km/s, 4.75 km/s oraz 15.21 km/s dla modów o stopniach odpowiednio 7, 8 oraz 9.

Wartość fazy modu radialnego została przyjęta na 0.0, a dla modu nieradialnego na  $0.3\pi$ . Różnica faz wprowadzała pomijalne różnice w seriach syntetycznych profili linii, wobec czego została ustalona na stałą wartość.

### 3.1.4 Parametry linii widmowej

W celu symulacji linii wybrano jej centralną długość o wartości 5300 Å (blisko środka zakresu optycznego). Przyjęto jej szerokość równoważną 10 km/s, a szerokość linii, bez efektów poszerzenia takich jak np. rotacja lub pulsacje, na 10 km/s. Takie wartości są zgodne z typowymi wartościami dla Cefeid (np. [Nardetto i in. 2006](#)).

### 3.1.5 Pozostałe parametry symulacji

Badany zakres prędkości radialnej został ustalony na wartości  $\pm 50$  km/s z krokiem obliczeń wynoszącym 1 km/s. Liczba segmentów na powierzchni gwiazdy została ustalona na 1000. Taka wartość zapewnia dobrą zbieżność symulacji; nie widać znaczących zmian przy dalszym zwiększaniu liczby segmentów. Długość całkowitego czasu prowadzenia symulacji oraz czas pomiędzy kolejnymi symulacjami były ustalane zależnie od badanego zagadnienia. Przeanalizowano dwa rodzaje przypadków: "idealny", w którym próbkowanie jest częste oraz nie został uwzględniony szum, a także przypadek "realistyczny", w którym próbkowanie miało odwzorowywać realistyczne obserwacje, uwzględniając szum obserwacyjny. Celem rozważania przypadku "idealnego" było zbadanie jak zmienność linii związana z modem nieradialnym jest zależna od stopnia i rzędu azymutalnego modu i innych parametrów, takich jak inklinacja gwiazdy. W przypadku "idealnym" całkowity czas prowadzenia symulacji wynosił 30 dni z krokiem czasowym pomiędzy kolejnymi symulacjami wynoszącym 7.2 minuty. Dla "idealnego" przypadku obliczono zatem 6001 ekspozycji. Celem przypadku "realistycznego" było zbadanie jak detekcja ma wpływ rozkład obserwacji i ich zaszumienie. Dla symulacji "realistycznych" próbkowanie zostanie podane dla każdego ze zbadanych przypadków.

### 3.1.6 Analiza okresowości w serii widm

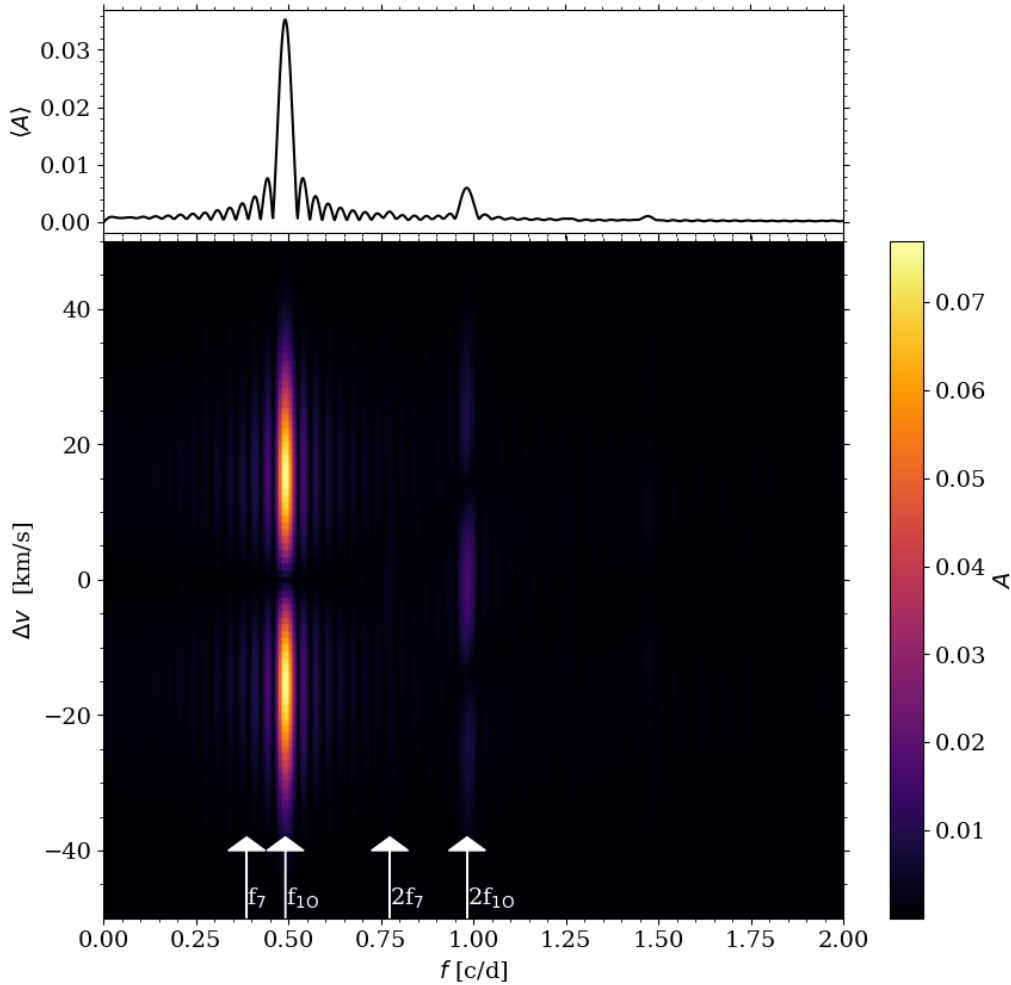
Analiza symulacji została przeprowadzona narzędziami w programie FAMIAS. Analiza okresowości dla serii profili linii jest możliwa na kilka sposobów. Możliwe jest obliczenie transformaty Fouriera dla nierównoodstępnych danych wielowymiarowych, takich jak np. seria linii widmowych, albo dla danych jednowymiarowych, takich jak np. seria momentów, policzonych dla każdej z linii. W przypadku serii linii widmowych transformata Fouriera może być liczona na dwa sposoby. Dwuwymiarowa metoda *pixel-by-pixel* polega na policzeniu odrębnej transformaty Fouriera dla każdej prędkości radialnej wzdłuż profilu linii. Wówczas wynik jest również dwuwymiarowy i przedstawia amplitudę w funkcji częstości i prędkości radialnej. Przykład jest przedstawiony na Rys. 3.1 (dolny panel). Jednowymiarowa metoda *pixel-by-pixel* polega na uśrednieniu wszystkich widm Fouriera wzdłuż profilu linii. Wówczas otrzymuje się średnie widmo Fouriera, w którym amplituda jest uśrednioną wartością po całym profilu linii. Uśrednione widmo Fouriera przedstawione jest na górnym panelu Rys. 3.1.

Alternatywnie, jednowymiarowe widmo Fouriera może także zostać policzone na podstawie serii momentów linii widmowych. Moment  $j$  jest zdefiniowany następująco:

$$\langle v^j \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} v^j p(v) dv}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(v) dv}, \quad (3.7)$$

gdzie  $p(v)$  to profil linii, a  $v$  to składnik pola prędkości, na które się składa rotacja oraz pulsacje.

W praktyce wykorzystuje się głównie trzy pierwsze momenty, ponieważ są one powiązane z charakterystycznymi cechami linii widmowej. Pierwszy moment,  $\langle v \rangle$ , odpowiada centroidowi linii w układzie odniesienia gwiazdy. Drugi moment,  $\langle v^2 \rangle$ , jest miarą szerokości linii, a trzeci moment,  $\langle v^3 \rangle$ , jest miarą jej skośności. Dla linii, której skrzydła nie odbiegają od funkcji Gaussa, pozostałe momenty mogą być określone za pomocą odpowiedniej kombinacji tych trzech podstawowych momentów. Co jest istotne z punktu widzenia analizy okresowości na podstawie momentów, szum rośnie z rosnącym stopniem momentu  $j$  oraz jest wyższy dla parzystych  $j$ , niż dla nieparzystych (Aerts i in. 2010).



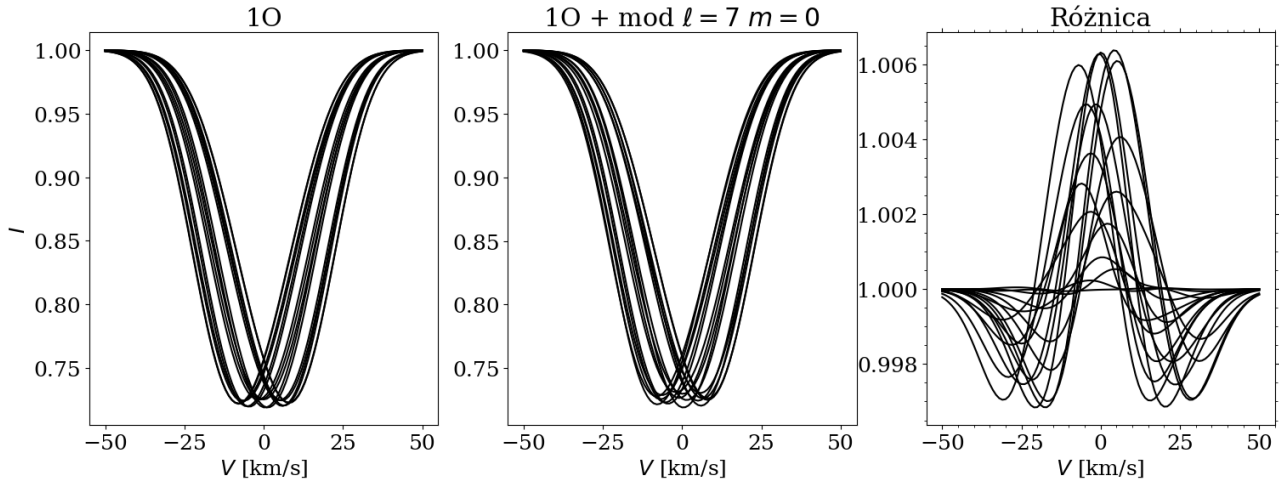
Rysunek 3.1: Przykład dwuwymiarowego widma Fouriera (dolny panel). Oś pozioma odpowiada częstotliwości a pionowa pozycji wzdłuż profilu linii, przy czym  $\Delta v = 0$  odpowiada jej centrum. Kolorem zaznaczono amplitudę sygnału. Jednowymiarowe uśrednione widmo Fouriera przedstawione jest na górnym panelu. Amplituda oznacza średnią wartość amplitudy wzdłuż profilu linii.

W rozprawie wykorzystano powyższe możliwości programu FAMIAS, aby zbadać, która z metod jest najbardziej skuteczna w poszukiwaniu okresowości związanych z modami nieradialnymi o stopniach  $\ell = 7, 8, 9$ . Dodatkowo do analizy wykorzystano metodę iteracyjnego odejmowania częstotliwości z widma analogiczną do metody wykorzystywanej podczas analizy okresowości w danych fotometrycznych. W przypadku analizy danych jednowymiarowych metoda ta nie odbiega od metodyki dla danych fotometrycznych.

### 3.2 Zmiany profili linii

Jak wspomniano wcześniej, zmiany profili linii były liczone dla dwóch przypadków. W pierwszym, "idealnym", pokrycie i rozdzielczość czasowa były bardzo duże, tj. odpowiadały 30 dniom obserwacji równoodstępnych co 7.2 minuty. Przykładowe zmiany w liniach widmowych na skutek pulsacji dla przypadku "idealnego" są zaprezentowane na Rys. 3.2. Przedstawiono kilka profili syntetycznych dla pulsacji w modzie pierwszym owertonowym (lewy panel) oraz dla pulsacji dwumodalnych w pierwszym owertonie i dodatkowym modzie nieradialnym o  $\ell = 7$  i





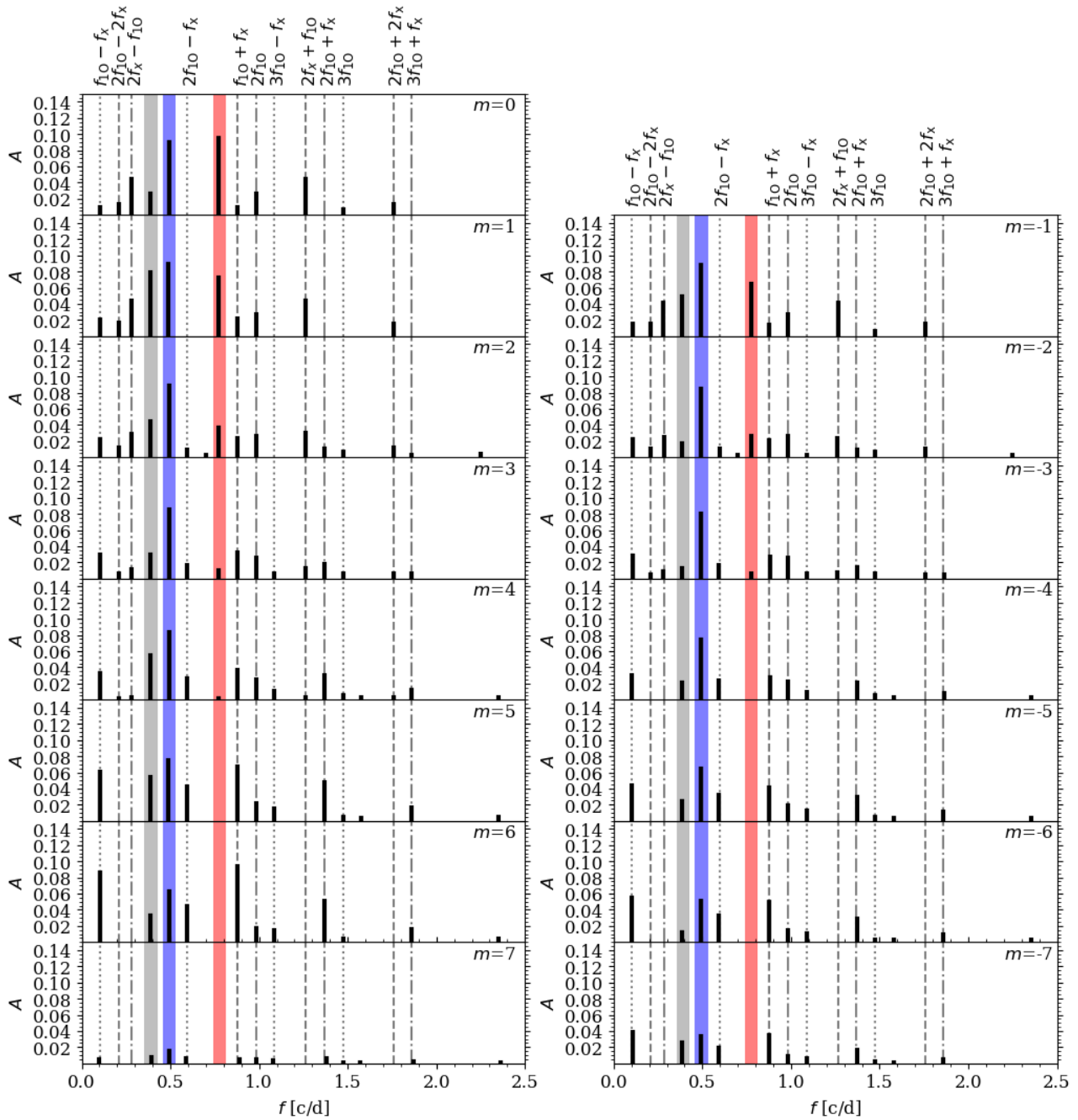
Rysunek 3.2: Przykład zmian profilu linii w jednej z symulowanych serii. Lewy panel: zmiany linii wynikające z pulsacji w radialnym pierwszym owertonie. Środkowy panel: zmiany linii wynikające z pulsacji dwumodalnych w pierwszym owertonie i modzie nieradialnym o  $\ell = 7$ ,  $m = 0$ . Prawy panel: różnica profili z poprzednich paneli.

$m = 0$  (środkowy panel). Różnice wynikające z obecności dodatkowego modu nieradialnego o bardzo małej amplitudzie są nieznaczne. Widoczne są dopiero po odjęciu od siebie profili linii (prawy panel). Pokazuje to, że detekcja pulsacji nieradialnych w przypadku towarzyszących pulsacji radialnych o dużej amplitudzie jest nietrywialna.

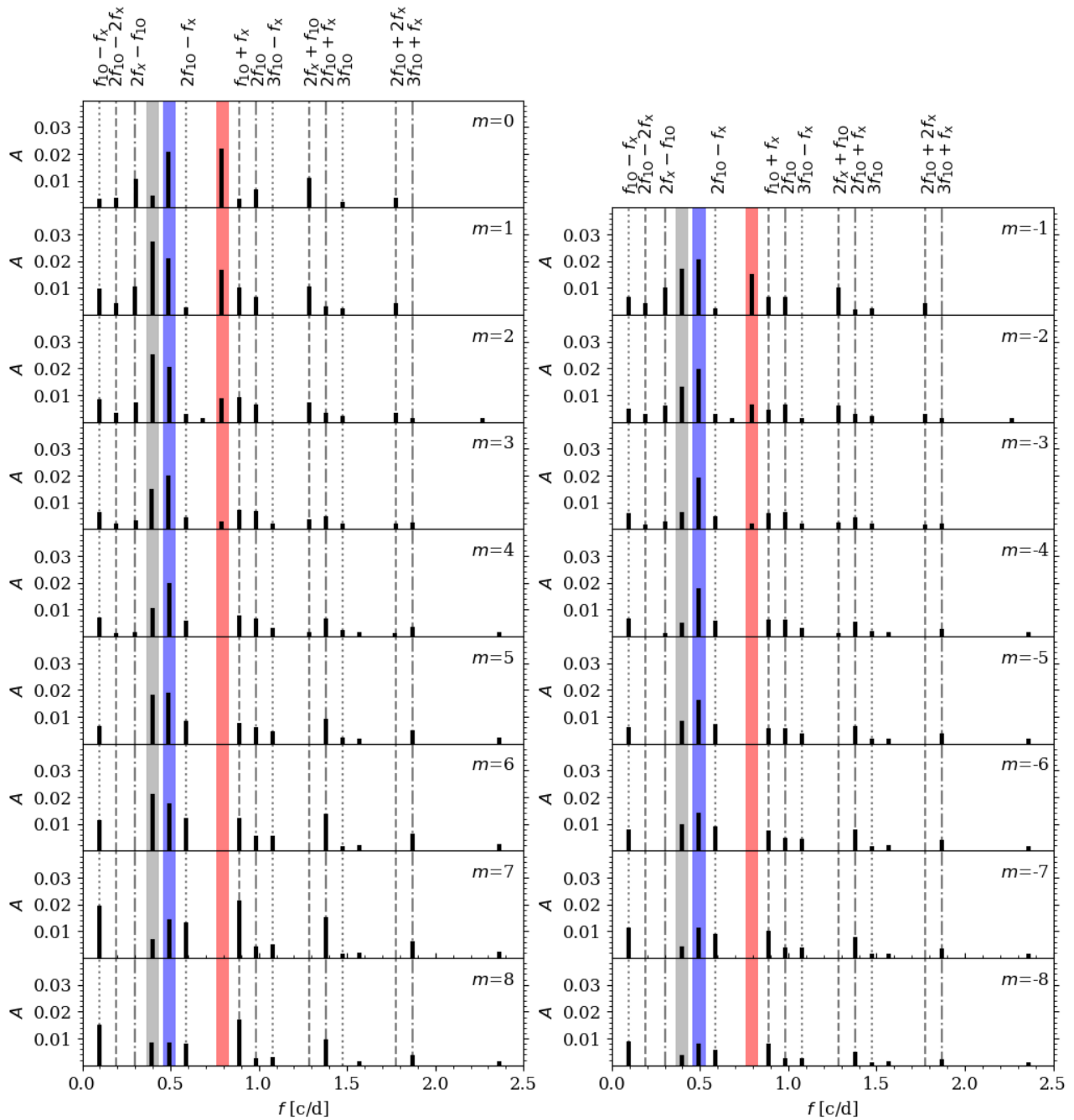
Na Rys. 3.3 przedstawione są częstości znalezione z wykorzystaniem jednowymiarowej metody *pixel-to-pixel* dla pulsacji dwumodalnych z dodatkowym modem nieradialnym o stopniu  $\ell = 7$ . Nie jest to jednak widmo częstości, ale wykres, gdzie zaznaczono poszczególne częstości znalezione na podstawie iteracyjnego odejmowania częstości. Za kryterium detekcji przyjęto stosunek sygnału do szumu  $\text{SNR}=4$ . Kolejne panele odpowiadają różnym wartościom rzędu azymutalnego  $m$ . Panele po lewej stronie odpowiadają  $m \geq 0$ , a po prawej stronie wartościom  $m < 0$ ; wartości  $m$  są podane w prawym górnym rogu każdego panelu. Przerywane linie odpowiadają pozycjom sygnałów kombinacyjnych pomiędzy modem radialnym i nieradialnym. Niebieski pas oznacza pozycję pierwszego owertonu. Szary i czerwony pas odpowiadają pozycjom modu nieradialnego oraz jego harmoniki. Szerokość pasów odpowiada rozdzielczości transformaty Fouriera. Pomimo tego, że w symulacjach zostały uwzględnione jedynie dwa mody z pominięciem harmonik oraz częstości kombinacyjnych, to zostały one wykryte podczas analizy symulacji ze względu na niesinusoidalność zmian linii widmowych (Gies 1991). Na Rys. 3.4 przedstawiony jest analogiczny wynik dla modu nieradialnego o stopniu  $\ell = 8$ , na na Rys. 3.5 dla modu nieradialnego  $\ell = 9$ . Zależność amplitudy od rzędu modu jest przedstawiona na Rys. 3.6, 3.7 i 3.8, odpowiednio dla modów o stopniach 7, 8 i 9 oraz ich harmonik. Najwyższa amplituda harmoniki modu nieradialnego jest zawsze, niezależnie od jego stopnia, najwyższa dla niskich rzędów azymutalnych. Dla  $|m| \geq 4$  nie jest ona wykrywana lub detekcja jest marginalna dla modu o stopniu 7 i rzędzie  $m = 4$ . Nieznacznie wyższa amplituda występuje dla harmonik modów o  $m > 0$  niż dla  $m < 0$ , czyli dla współbieżnych modów. Inaczej zachowuje się amplituda modu nieradialnego. Amplituda modu jest niższa dla  $m = 0$  niż dla  $|m| = 1$  dla każdego stopnia modu. W przypadku modów o stopniach 7 i 8, zmiany amplitudy są niemonotoniczne. Widać też wyraźnie, że amplitudy są wyższe dla modów współbieżnych. Najwyższa amplituda modu w każdym przypadku jest obserwowana dla  $m = 1$ .

Na Rys. 3.9 przedstawiono porównanie stosunków amplitudy harmoniki modu nieradialnego

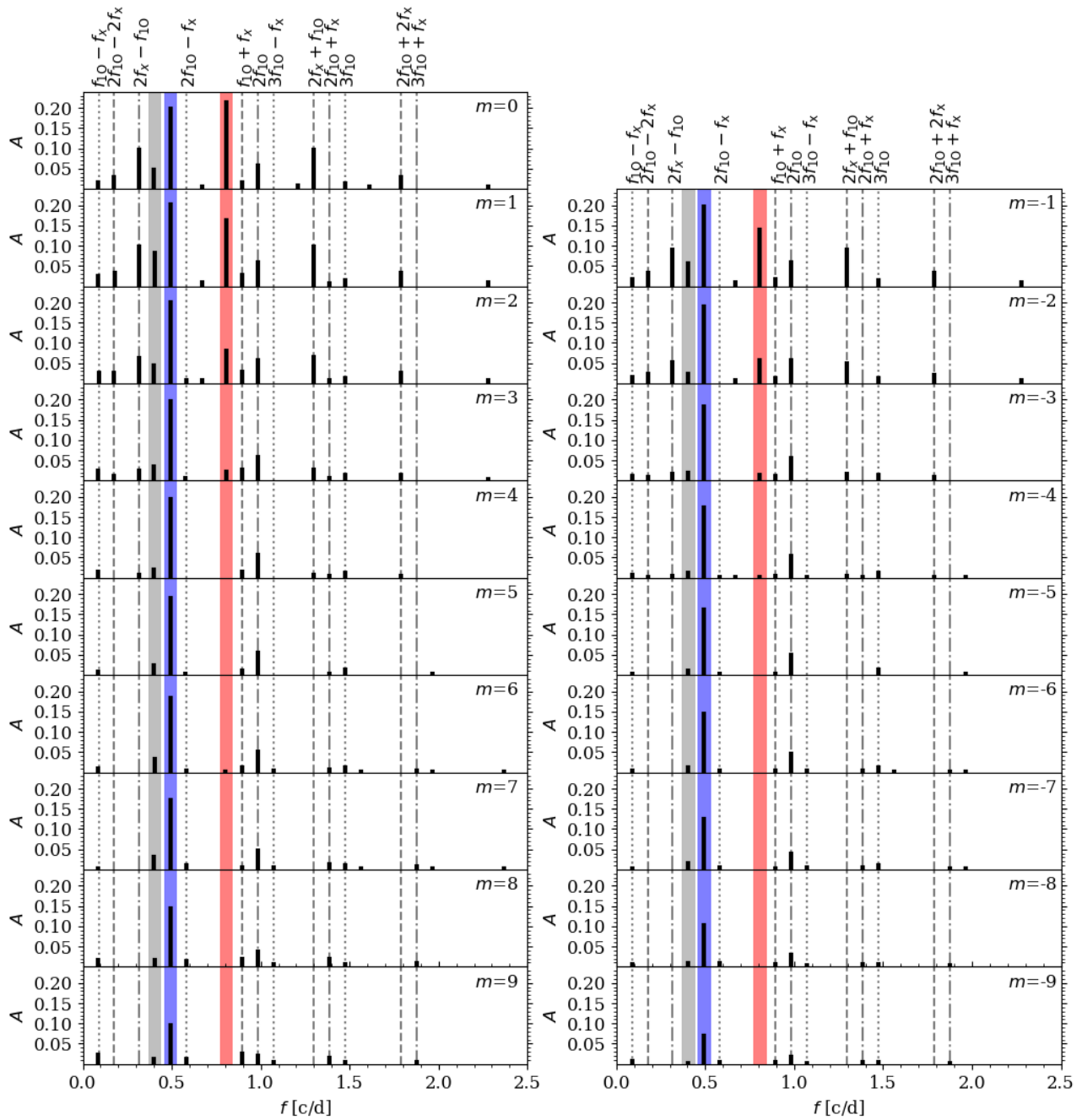




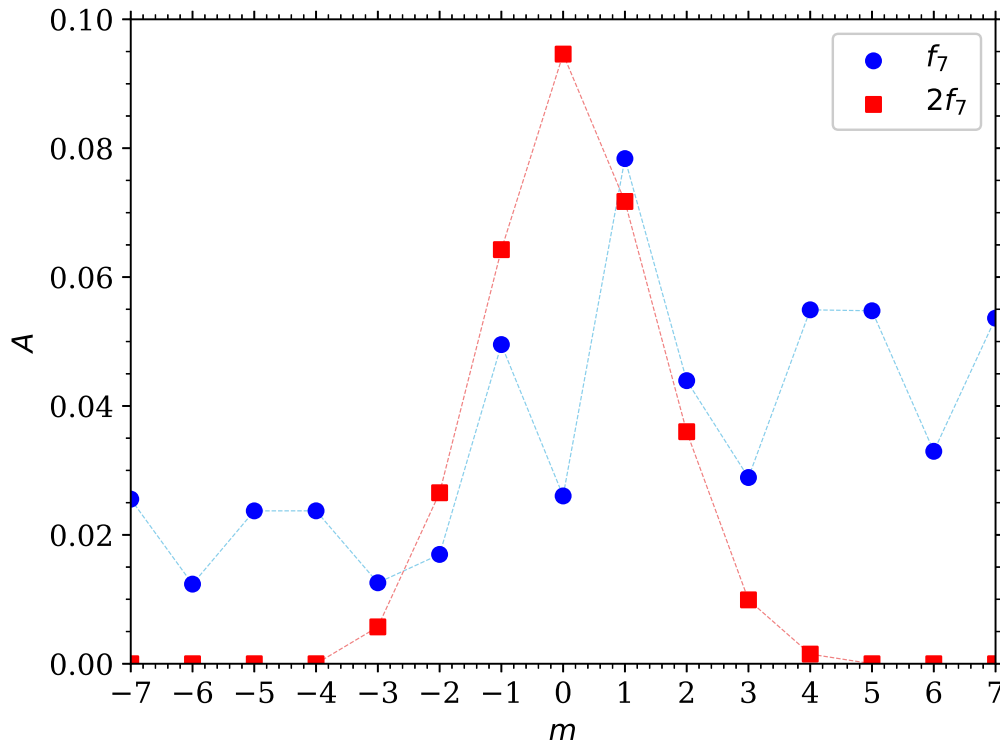
Rysunek 3.3: Częstości znalezione w symulacjach linii widmowych dla pulsacji dwumodalnych z pierwszym owertonem i modem nieradialnym o stopniu  $\ell = 7$ . Rząd azymutalny jest podany w prawym górnym rogu każdego panelu. Amplituda odpowiada średniej amplitudzie wzdłuż profilu linii. Pozycje sygnałów odpowiadających kombinacjom pomiędzy modem radialnym i nieradialnym są zaznaczone przerywanymi liniami. Niebieski, szary i czerwony obszar odpowiadają pozycjom odpowiednio modu radialnego, nieradialnego i jego harmoniki. Szerokość tego obszaru odpowiada rozdzielczości transformaty Fouriera.



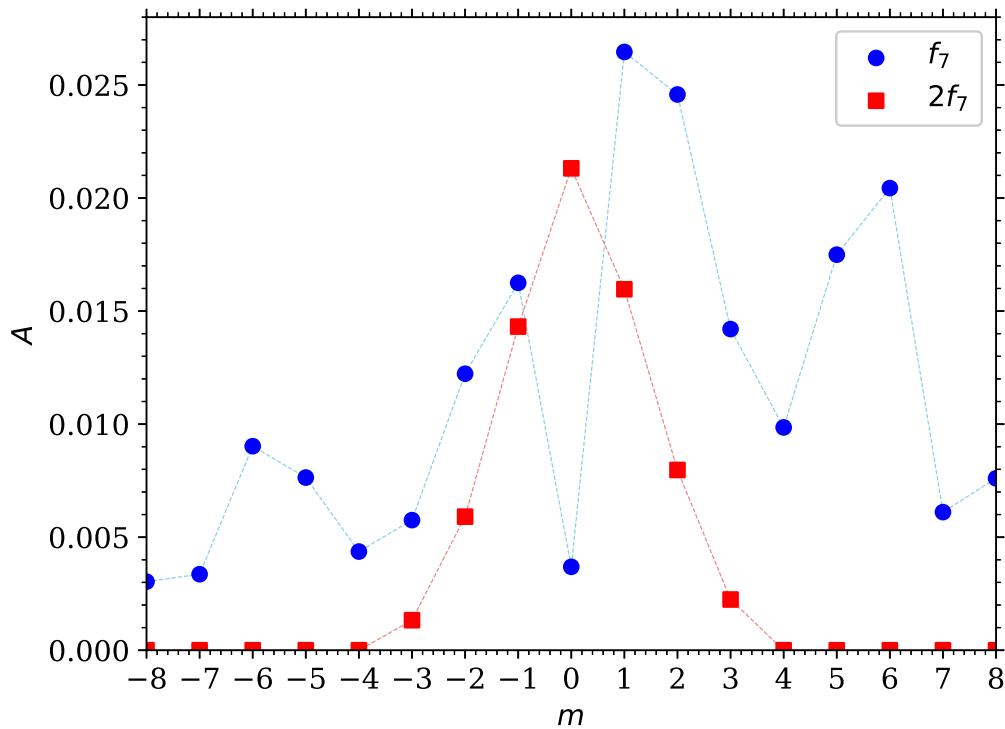
Rysunek 3.4: Rysunek analogiczny do Rys. 3.3 dla  $\ell = 8$ .



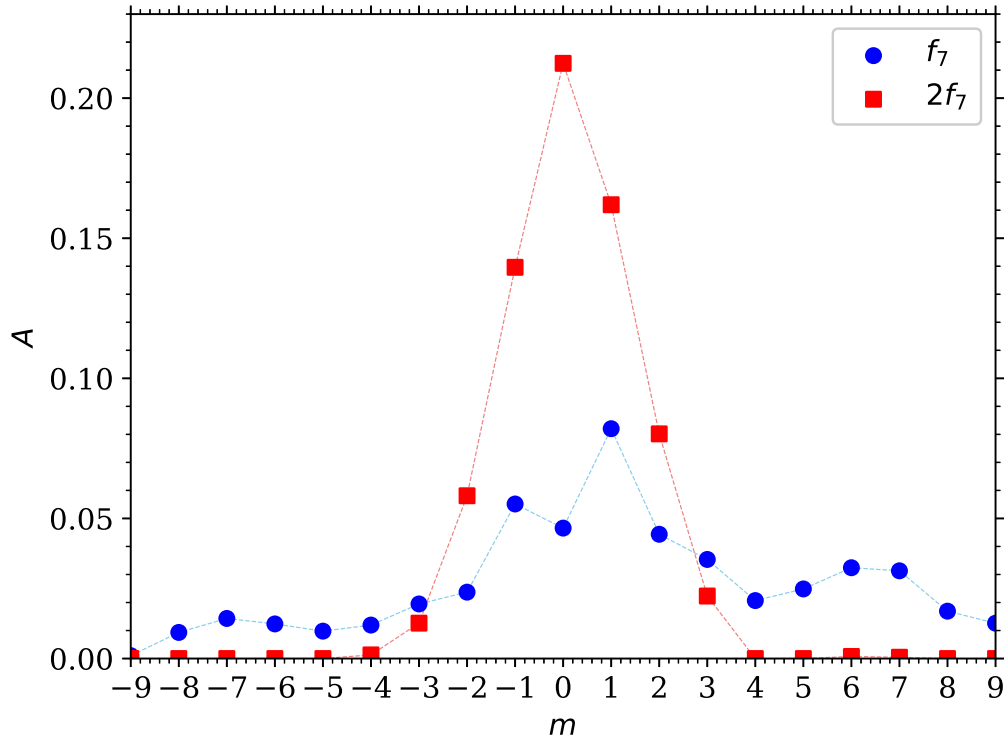
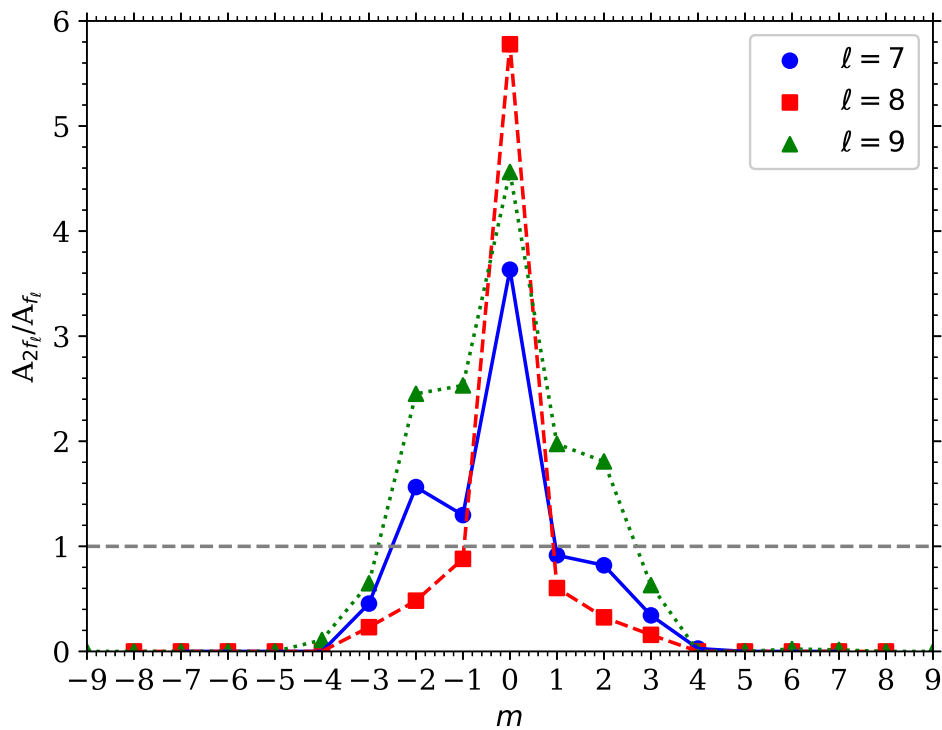
Rysunek 3.5: Rysunek analogiczny do Rys. 3.3 dla  $\ell = 9$ .



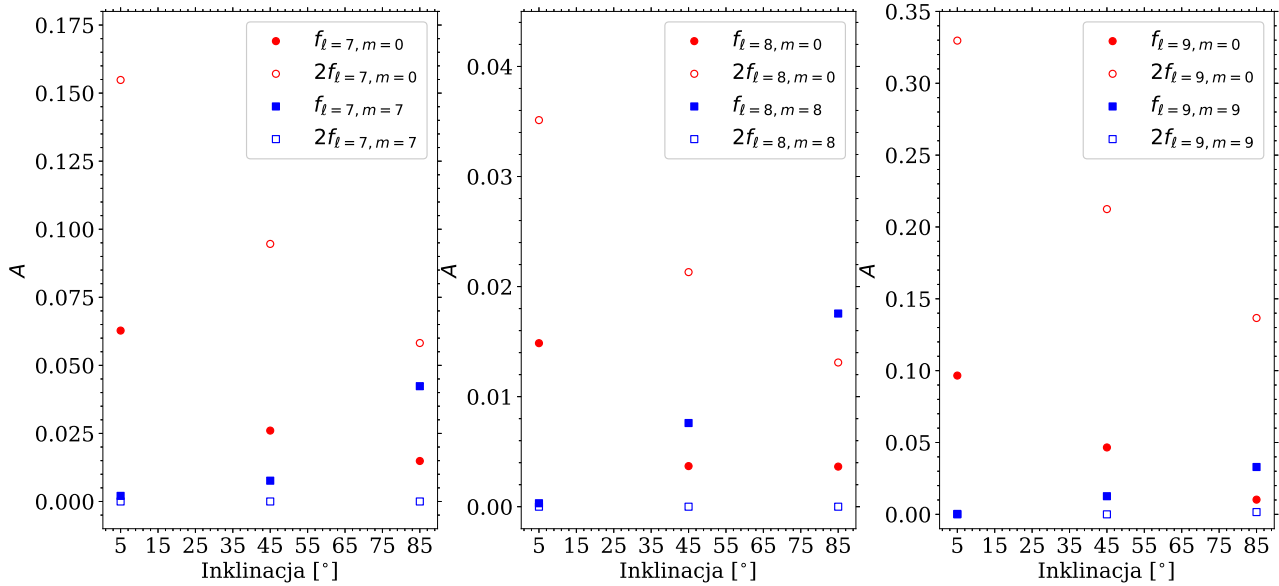
Rysunek 3.6: Zależność średniej amplitudy wzdłuż profilu linii od rzędu azymutalnego  $m$  dla modu nieradialnego o stopniu  $\ell = 7$  (niebieskie punkty) i jego harmoniki (czerwone kwadraty). W celu lepszej wizualizacji punkty połączone prostymi.



Rysunek 3.7: Rysunek analogiczny do Rys. 3.6 dla  $\ell = 8$ .

Rysunek 3.8: Rysunek analogiczny do Rys. 3.6 dla  $\ell = 9$ .

Rysunek 3.9: Stosunek amplitudy harmoniki modu nieradialnego do amplitudy modu dla modów o stopniach 7 (niebieska linia), 8 (czerwona przerywana linia) oraz 9 (zielona kropkowana linia). Szara pozioma przerywana linia odpowiada wartości 1.



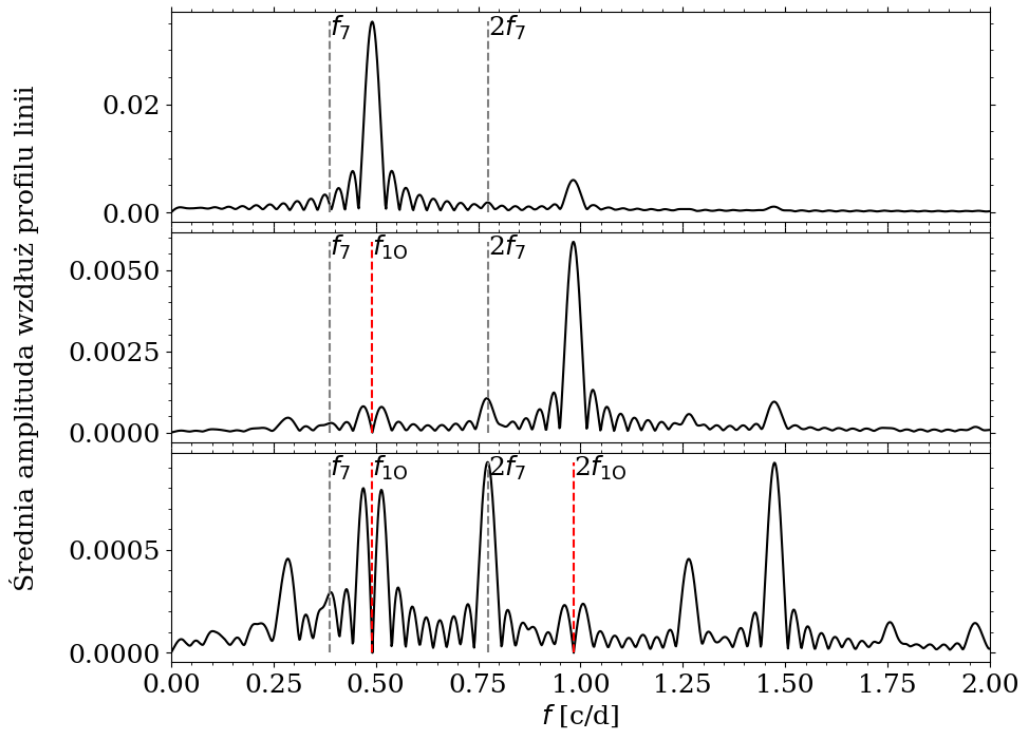
Rysunek 3.10: Wpływ inklinacji na obserwowane amplitudy modów nieradialnych i ich harmonik. Rozważono trzy wartości inklinacji:  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  i  $90^\circ$  oraz dwie wartości rzędu azymutalnego:  $m = 0$  i  $m = \ell$ . Prawy panel: mod o  $\ell = 7$ , środkowy panel:  $\ell = 8$ , lewy panel:  $\ell = 9$ . Amplituda odpowiada średniej amplitudzie wzdłuż profilu linii.

do amplitudy modu dla trzech rozważanych modów w funkcji rzędu azymutalnego. Punkty znajdujące się poniżej szarej przerywanej linii oznaczają, że dla modu o danym stopniu i rzędzie azymutalnym amplituda modu jest wyższa niż amplituda harmoniki. Taka sytuacja występuje dla wszystkich rzędów azymutalnych, poza  $m = 0$ , dla modu o stopniu 8, który w obserwacjach fotometrycznych odpowiada środkowemu ciągowi na diagramie Petersena. Dla modu o stopniu 7, poza trzema wartościami rzędów azymutalnych, amplituda modu jest wyższa niż amplituda harmoniki. Dla modu o stopniu 9 obserwowana jest wyższa amplituda harmoniki od amplitudy modu dla pięciu wartości rzędów azymutalnych.

### 3.2.1 Wpływ inklinacji na detekcję modów nieradialnych

W powyższej analizie, dla wszystkich symulacji przyjęto wartość inklinacji wynoszącą  $45^\circ$ . Aby sprawdzić jak wartość inklinacji wpłynie na wyniki analizy, rachunki powtórzono dla trzech wartości inklinacji:  $5^\circ$ ,  $45^\circ$  oraz  $85^\circ$ . Rozważano trzy stopnie modów nieradialnych oraz skrajne wartości rzędów azymutalnych  $m = 0$  lub  $m = \ell$ , ponieważ dla nich wpływ inklinacji jest najbardziej zauważalny. Amplitudy modu nieradialnego i jego harmoniki w zależności od wartości inklinacji przedstawione są na Rys. 3.10. Harmonika modu dla  $m = \ell$  nie jest wykrywana (na Rys. 3.10 amplituda równa 0) niezależnie od przyjętej inklinacji. Amplituda modu nieradialnego dla  $m = \ell$  rośnie wraz ze wzrostem inklinacji. Dla niskich inklinacji detekcja jest niemożliwa albo marginalna. Dla modu nieradialnego o  $m = 0$  i jego harmoniki, amplitudy spadają wraz ze wzrostem inklinacji. Zależnie od stopnia modu jest on niewykrywalny lub marginalnie wykrywany dla  $i = 85^\circ$ . Inklinacja jest zatem istotnym czynnikiem decydującym czy mod nieradialny o danym stopniu i rzędzie azymutalnym będzie możliwy do wykrycia w rzeczywistych danych.



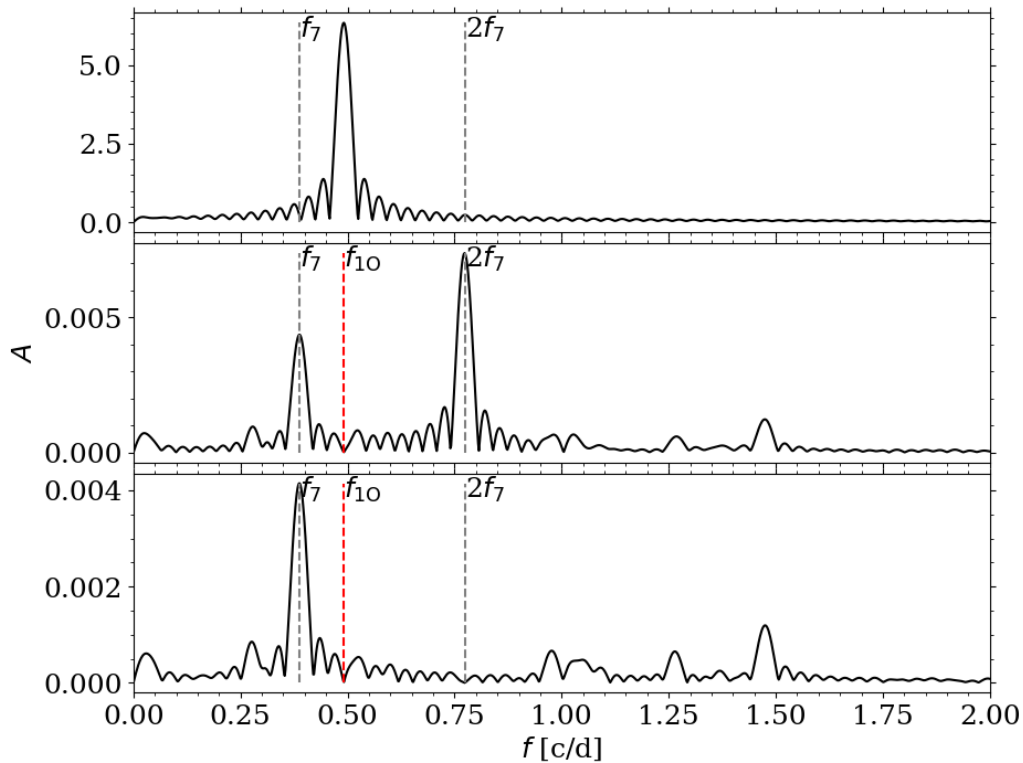


Rysunek 3.11: Jednowymiarowe widmo Fouriera uśrednione po profilu linii. Widmo Fouriera oryginalnych danych jest przedstawione na górnym panelu. Kolejne panele odpowiadają kolejnym krokom odejmowania częstości. Odjęte sygnały są zaznaczone na kolejnych panelach za pomocą czerwonych przerywanych linii oraz opisane. Szarymi przerywanymi liniami zaznaczono częstość modu nieradialnego oraz jego harmoniki.

### 3.2.2 Porównanie różnych metod detekcji modu nieradialnego

W poprzednich rozdziałach, w celu poszukiwania zmienności i wyznaczania ich okresów, wykorzystywano jedynie jednowymiarowe widma Fouriera. Możliwe jest także wykorzystanie widm Fouriera dla momentów policzonych dla każdego profilu. W poniższym podrozdziale zbadane zostanie jak detekcja modu i jego harmoniki zależy od wykorzystanej metody poszukiwania okresów dla przypadku "idealnego". Dla testu wybrano pulsacje dwumodalne w pierwszym owertonie i modzie nieradialnym o stopniu 7 i rzędzie azymutalnym 0. Wartość inklinacji została przyjęta na  $45^\circ$ .

W celu późniejszego porównania, dla przedstawionych wyżej parametrów, na Rys. 3.11 zaprezentowano jednowymiarowe widmo Fouriera uśrednione wzduż profilu linii. Na górnym panelu zaprezentowano widmo Fouriera dla oryginalnych danych, natomiast na dwóch kolejnych panelach pokazano dwa kolejne kroki odejmowania częstości. Za pomocą szarych linii zaznaczono częstości modu nieradialnego oraz jego harmoniki. W widmie częstości oryginalnych danych żaden z tych sygnałów nie jest widoczny. Widoczny jest jedynie sygnał pochodzący od pierwszego owertonu i niższy sygnał związany z jego harmoniką. Na drugim panelu zaprezentowano widmo częstości po usunięciu sygnału pochodzącego od pierwszego owertonu. Zauważalny jest wówczas niski sygnał w pozycji harmoniki modu nieradialnego. Na trzecim panelu zaprezentowane jest widmo w kolejnym kroku procedury odejmowania częstości, w którym dodatkowo usunięto częstość harmoniki pierwszego owertonu. Wówczas dominującą częstością w widmie jest harmonika modu nieradialnego. Pomimo usunięcia z widma zmienności odpowiadającej pierwszemu owertonowi i jego harmonikom, w dalszym ciągu widać pozostałości po



Rysunek 3.12: Kolejne kroki iteracyjnego odejmowania częstości w widmie pierwszego momentu. Znaczenie paneli analogicznie jak na Rys. 3.11.

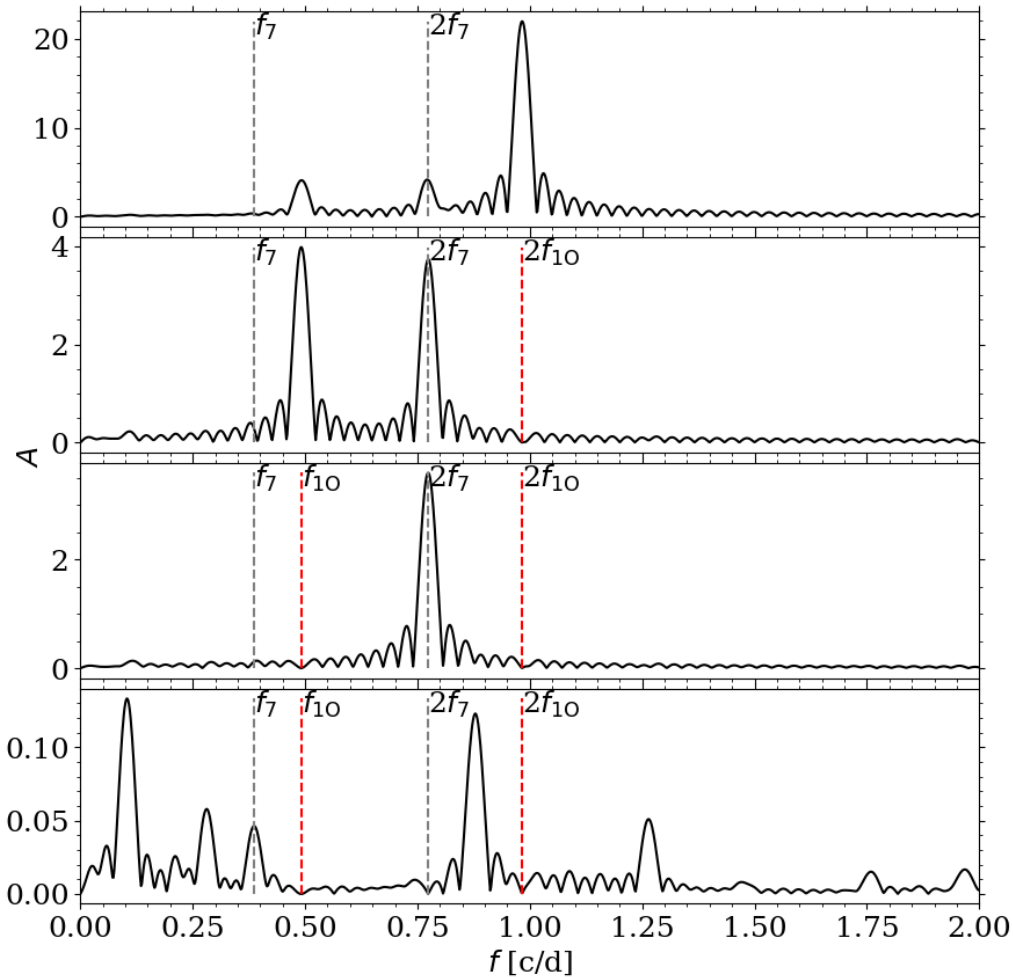
tych sygnałach, jest to jednak sztuczny artefakt, co potwierdzono przeprowadzając procedurę odejmowania częstości niezależnie od programu FAMIAS.

Na Rys. 3.12 przedstawiono widmo Fouriera dla pierwszego momentu, który odpowiada pozycji centroidu linii. W widmie dla oryginalnych danych dominuje sygnał pierwszego owertonu a jego harmonika jest niewidoczna. Na drugim panelu przedstawiono widmo po odjęciu pierwszego owertonu. W widmie Fouriera dla pierwszego momentu nie dominuje harmonika pierwszego owertonu. Sygnały pochodzące od modu nieradialnego i jego harmoniki są wyraźnie widoczne, przy czym amplituda harmoniki jest najwyższa.

Na Rys. 3.13 przedstawiono widmo Fouriera dla drugiego momentu oraz trzy kolejne kroki iteracyjnego odejmowania częstości w widmie. W oryginalnym widmie częstości dla drugiego momentu dominuje harmonika pierwszego owertonu. Ponadto widać niskie sygnały związane z pierwszym owertonem oraz harmoniką modu nieradialnego. Oba sygnały dominują w widmie na drugim panelu, po odjęciu częstości harmoniki pierwszego owertonu. Trzeci panel przedstawia widmo po odjęciu sygnału od pierwszego owertonu. Na ostatnim panelu zaprezentowane jest widmo po usunięciu harmoniki modu nieradialnego. Pozostałe sygnały to częstości kombinacyjne oraz niski sygnał pochodzący od modu nieradialnego.

Na Rys. 3.14 przedstawiono widmo Fouriera dla trzeciego momentu oraz kolejne kroki odejmowania częstości. Sygnały związane z modem nieradialnym oraz jego harmoniką są niewidoczne lub bardzo niskie nawet po odjęciu sygnałów  $f_{10}$  oraz  $3f_{10}$ . Widoczne sygnały w ostatnim kroku odejmowania częstości (ostatni panel) odpowiadają harmonice modu radialnego oraz kombinacjom liniowym harmoniki modu nieradialnego z pierwszym owertonem.

Z wykonanego porównania różnych metod analizy serii linii widmowych wynika, że dla prawdziwych obserwacji najlepszą metodą detekcji modu nieradialnego jest analiza pierwszego momentu, a jego harmoniki – analiza drugiego momentu.

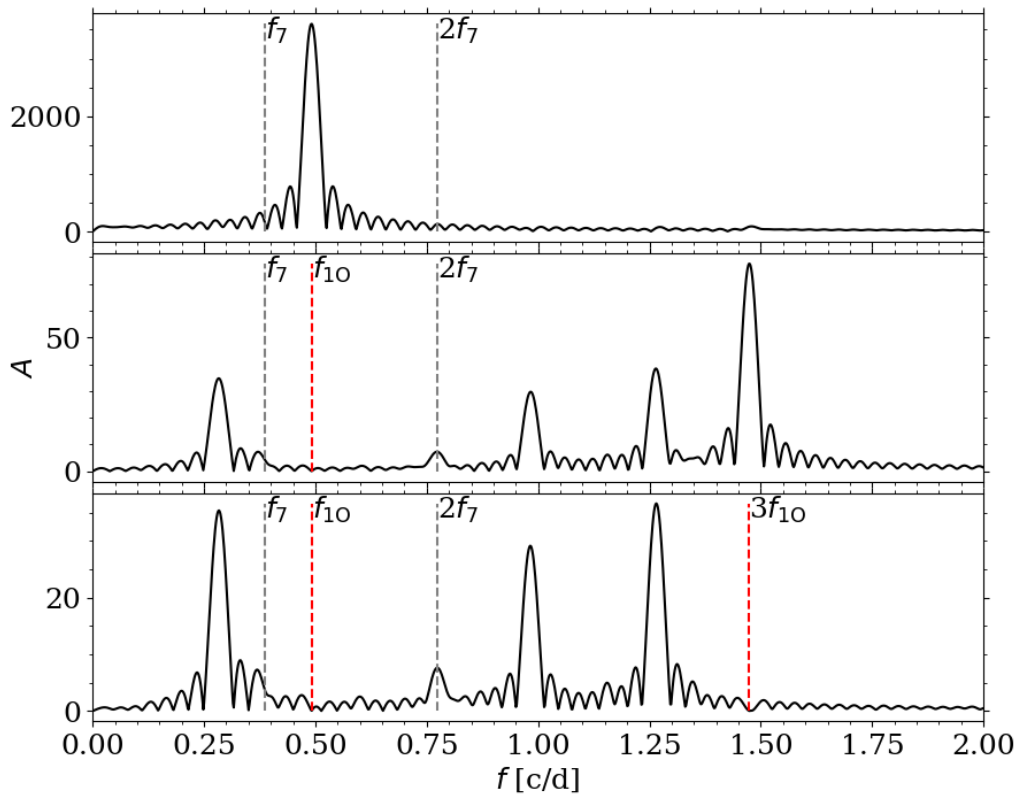


Rysunek 3.13: Kolejne kroki iteracyjnego odejmowania częstości w widmie drugiego momentu. Znaczenie paneli analogicznie jak na Rys. 3.11.

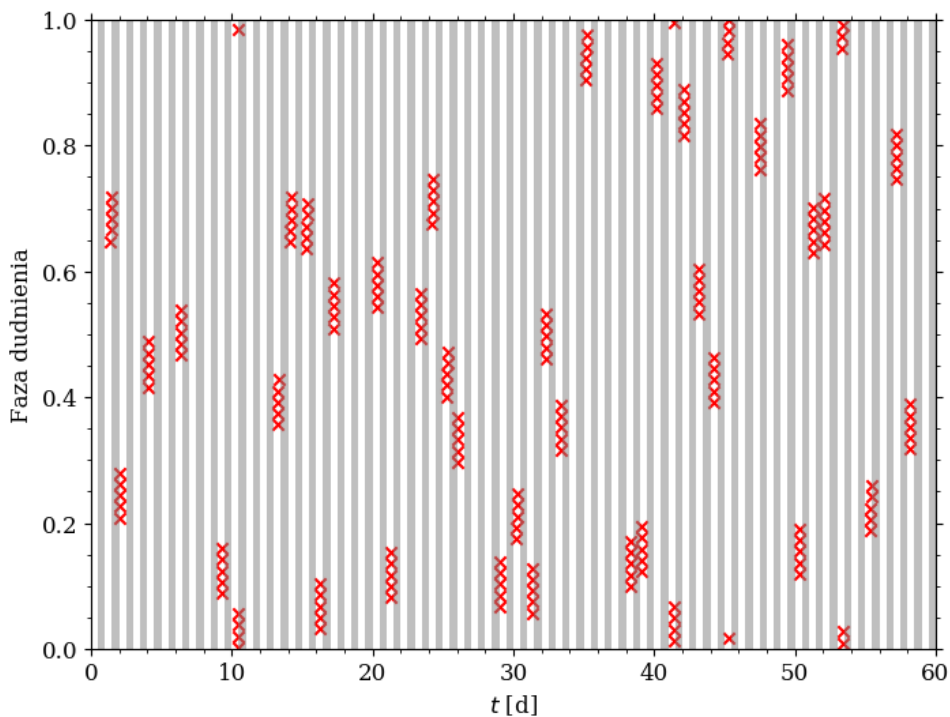
### 3.3 Zmiany profili linii w realistycznym przypadku

Rozważania nad możliwością detekcji modów z poprzednich podrozdziałów dotyczyły tzw. "idealnego" przypadku. Liczba linii w każdej symulacji wynosiła 6001, a obserwacje były równoodstępne i do syntetycznych profili linii nie dodano szumu. W tym podrozdziale zbadano przypadek "realistyczny". Oznacza to, że przyjęto realistyczne próbkowanie widm, a także uwzględniono szum w postaci białego szumu Gaussa.

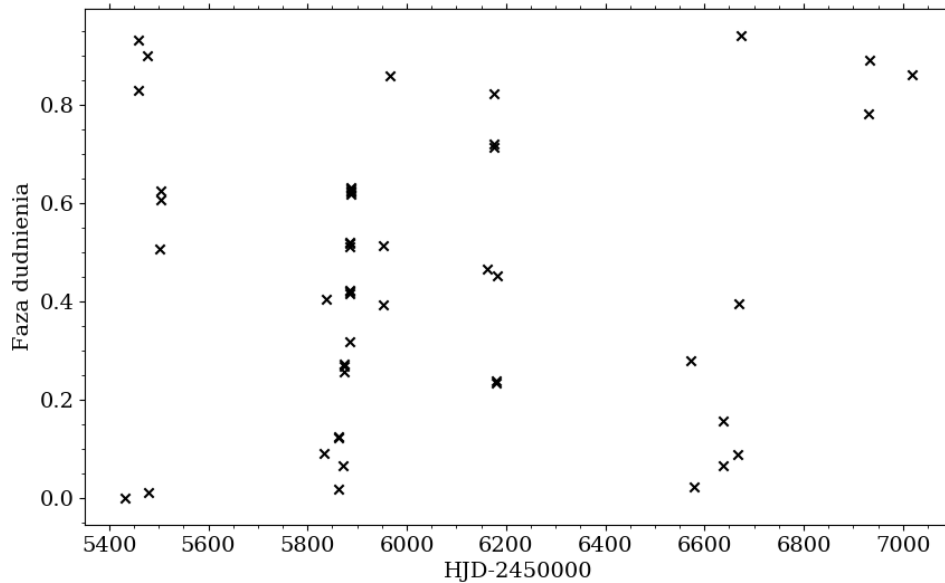
W celu zbadania jakie obserwacje byłyby konieczne, by wykryć w nich mod nieradialny, przeprowadzono serię symulacji, w których dodano przerwy obserwacyjne związane z dniami oraz dłuższe przerwy związane z przyznany czas obserwacyjny oraz niekorzystną pogodą. Symulowano zmiany w linii spowodowane modem radialnym oraz nieradialnym o stopniu 7, 8 lub 9. Przyjęto parametry fizyczne dla OGLE-CEP-LMC-2532 oraz wartość inklinacji  $45^\circ$ . Dany ekspozycji wybrano losowo, aby zasymulować realistyczny przebieg obserwacji. Przykładowe daty obserwacji wraz z pokryciem okresu dudnienia badanych modów radialnego i nieradialnego są przedstawione na Rys. 3.15, gdy wybrano losowo 40 nocy obserwacji z okresu 60 dni. Każdej nocy wykonywano 5 widm. Warunkiem wybierania momentów obserwacji było dostateczne pokrycie okresu dudnienia badanych modów radialnego i nieradialnego w trakcie całego okresu obserwacji. Dodatkowo rozważono momenty obserwacji wykorzystane w pracy [Pilecki](#)



Rysunek 3.14: Kolejne kroki iteracyjnego odejmowania częstości w widmie trzeciego momentu. Znaczenie paneli analogicznie jak na Rys. 3.11.



Rysunek 3.15: Przykładowe symulacje realistycznych obserwacji liczących 200 widm wykonanych w ciągu 60 dni. Przedstawiono momenty symulowanych obserwacji oraz pokrycie okresu dudnienia dla pulsacji dwumodalnych. Czerwone krzyżyki odpowiadają momentom obserwacji. Szarymi rejonami zaznaczono przerwy związane z cyklem dobowym.



Rysunek 3.16: Dany obserwacji spektroskopowych gwiazdy OGLE-LMC-CEP-2532 wykorzystane w pracy [Pilecki i in. \(2015\)](#). Na osi pionowej przedstawione jest pokrycie okresu dudnienia pierwszego owertonu i hipotetycznego modu nieradialnego o stopniu 7.

[i in. \(2015\)](#) i zostały one przedstawione na Rys. 3.16.

W Tab. 3.1 przedstawiono wyniki poszukiwania harmoniki modu nieradialnego przy danym sposobie próbkowania. Pierwsza kolumna zawiera liczbę nocy, podczas których zbierano obserwacje. Pierwsze pięć rzędów w tabeli odpowiada obserwacjom każdej kolejnej nocy. Kolejne trzy rzędy odpowiadają obserwacjom podczas 40 lub 10 nocy losowo wybranych spośród okresu 60 dni. Druga kolumna zawiera łączną liczbę widm. W następnych kolumnach zaznaczono, dla poszczególnych poziomów SNR, czy harmonika modu nieradialnego została znaleziona w danych wykorzystując jednowymiarową metodę *pixel-to-pixel* (tak), czy nie (nie). Jako kryterium detekcji przyjęto stosunek sygnału do szumu w widnie częstości wynoszący 4. ‘Tak’ pogrubioną czcionką oznacza, że sygnał nie został wykryty w uśrednionym widmie Fouriera, ale podczas analizy momentów (jeżeli sygnał był wykryty w średnim widmie Fouriera, nie przeprowadzono analizy momentów). Jako wskaźnik opisujący jakość widm wybrano średnie SNR dla widma, ponieważ jest to wartość którą da się zaplanować dostosowując czas ekspozycji w zależności od apertury i obserwowanego obiektu na etapie planowania obserwacji<sup>1</sup>. W przypadku dużej liczby widm (400), harmonika modu może być wykryta nawet dla relatywnie niskiego SNR~100. W przypadku planowania kampanii obserwacyjnej istotna będzie długość czasu monitorowania gwiazdy. W przypadku 10 dni obserwacyjnych wybranych losowo spośród 60 dniowego okresu czasu, nawet pomimo zebranych łącznie 100 widm, nie jest możliwa detekcja harmoniki modu. Natomiast w przypadku 50 dni monitorowania gwiazdy, przy zebraniu 96 widm, detekcja jest możliwa dla danych o SNR~300.

Harmonika modu nieradialnego jest to najczęstszy wykrywany sygnał podczas analizy częstości danych fotometrycznych (patrz rozdział 2). Możliwość jego wykrycia została przedyskutowana powyżej. Jednak aby móc przeprowadzić identyfikację modu, konieczne jest wykrycie samego modu nieradialnego w danych. W tabelach 3.2, 3.3 i 3.4 przedstawiono wyniki detekcji modu (o stopniu odpowiednio 7, 8 i 9) w widmach o realistycznym próbkowaniu oraz z dodanym szumem. W celu detekcji modu wykorzystano analizę pierwszego momentu, ponieważ,

<sup>1</sup>patrz np. <https://astronomers.salt.ac.za/software/hrs-simulator/>

Tabela 3.1: Wykrywalność harmoniki modu nieradialnego w symulacjach pulsacji dwumodalnych z pierwszym owertonem oraz modem nieradialnym o stopniu 7 i rzędzie azymutalnym 0 dla realistycznych czasów obserwacyjnych i różnych wartości SNR. Pierwsza kolumna przedstawia liczbę nocy obserwacyjnych, a druga łączną liczbę widm. W kolejnych kolumnach "tak" oznacza detekcję, a "nie" brak detekcji, natomiast "tak" pogrubioną czcionką oznacza detekcję jedynie w widmie Fouriera drugiego momentu. "-" oznacza brak wyników dla danej symulacji, ponieważ przy braku detekcji nie zwiększono dalej poziomu szumu w danych.

$N_{\text{nocy}}$	$N_{\text{widm}}$	SNR				
		brak szumu	300	200	150	100
50	74	tak	nie	–	–	–
50	96	tak	<b>tak</b>	nie	–	–
50	121	tak	<b>tak</b>	<b>tak</b>	nie	–
50	244	tak	tak	tak	<b>tak</b>	nie
40 z 60	200	tak	<b>tak</b>	nie	–	–
10 z 60	100	nie	–	–	–	–
40 z 60	400	tak	tak	tak	tak	<b>tak</b>

jak pokazano wcześniej, ma ona największy potencjał dla tego zastosowania. Przetestowano możliwości detekcji modu o różnych rzędach azymutalnych w zależności od liczby widm oraz wartości SNR. Wartość rzędu azymutalnego modu silnie wpływa na możliwość jego detekcji. Wraz z jego wartością zmienia się w znaczny sposób amplituda modu. Pokazano to na Rys. 3.6, Rys. 3.7 oraz Rys. 3.8. Niska amplituda modu dla rzędu azymutalnego o wartości 0 powoduje, że nawet dla wartości SNR=500 nie jest możliwa detekcja modu (niezależnie od stopnia modu). Jego detekcja jest możliwa jedynie w pozbawionych szumu danych. W tabeli 3.2 dla modu o stopniu 7 przetestowano dwa rodzaje próbkowania, pierwsze z nich odpowiada obserwacjom każdej nocy przez 50 nocy uzyskując łącznie 244 widm. Dwa ostatnie rzędy tabeli odpowiadają próbkowaniu z pracy Pilecki i in. (2015). Mod nieradialny o stopniu 7 i rzędzie azymutalnym 1 jest możliwy do wykrycia nawet po dodaniu do widma szumu. W jego przypadku widać wpływ próbkowania na możliwość detekcji. W przypadku analizy 244 widm zebranych w ciągu 50 nocy detekcja modu jest możliwa do wartości SNR wynoszącej 100. Co więcej, detekcja jest także możliwa dla próbkowania odpowiadającego datom obserwacji z pracy Pilecki i in. (2015), jednak jedynie dla SNR=500. Dla rzędu modu o wartości  $m = -1$  detekcja jest możliwa do wartości SNR=200 dla 244 widm. Detekcja modów o rzędach azymutalnych wynoszących 2, 3 i 4 jest zgodna z przewidywaniami z Rys. 3.6, tj. im wyższa amplituda na Rys. 3.6, tym niższe SNR umożliwia detekcję sygnału.

W tabeli 3.3 przedstawiono wyniki detekcji dla modów o stopniu 8. Znow, detekcja nie jest możliwa w przypadku modu o rzędzie wynoszącym 0 nawet dla SNR=500. Detekcja modu o rzędzie 1 jest możliwa nawet po dodaniu szumu, dla wartości SNR, charakteryzującej szum w widmach, wynoszącej 100. Dla próbkowania z pracy Pilecki i in. (2015), mod nieradialny o  $m = 0$  nie jest możliwy do wykrycia nawet w bezszumowych danych. W przypadku jednak modu o  $m = 1$ , jest on wykryty dla SNR=500.

W tabeli 3.4 przedstawiono wyniki detekcji dla modów o stopniu 9. Mody o rzędzie azymutalnym  $m = 0, 2, 4$  nie są możliwe do wykrycia po dodaniu szumu. Dla danych o SNR=200 istnieje możliwość wykrycia modu o  $m = 1$  na podstawie 244 widm (zbieranych każdej nocy) oraz 200 widm (nie zbieranych każdej nocy). Dla próbkowania z pracy Pilecki i in. (2015) oraz dla danych liczących 50 widm (obserwacje każdej nocy), mod jest możliwy do wykrycia, gdy szum w widmach odpowiada SNR=500.



Tabela 3.2: Wykrywalność modu nieradialnego w symulacjach pulsacji dwumodalnych z pierwszym owertonem oraz modem nieradialnym o stopniu 7 dla realistycznych czasów obserwacyjnych i różnych wartości SNR. Kolejne kolumny zawierają rząd azymutalny, liczbę nocy obserwacyjnych i łączną liczbę widm. W kolejnych kolumnach "tak" oznacza detekcję, a "nie" brak detekcji. "-" oznacza brak wyników dla danej symulacji, ponieważ przy braku detekcji nie zwiększono dalej poziomu szumu w danych.

$m$	$N_{\text{nocy}}$	$N_{\text{widm}}$	SNR				
			brak szumu	500	300	200	100
0	50	244	tak	nie	-	-	-
1	50	244	tak	tak	tak	tak	tak
-1	50	244	tak	tak	tak	tak	nie
2	50	244	tak	tak	tak	nie	-
3	50	244	tak	nie	-	-	-
4	50	244	tak	tak	tak	nie	-
0	Pilecki i in. (2015)		tak	nie	-	-	-
1	Pilecki i in. (2015)		tak	tak	nie	-	-

Tabela 3.3: Analogicznie jak Tab. 3.2, ale dla modu nieradialnego o  $\ell = 8$ .

$m$	$N_{\text{nocy}}$	$N_{\text{widm}}$	SNR				
			brak szumu	500	300	200	100
0	50	244	tak	nie	-	-	-
1	50	244	tak	tak	tak	tak	nie
2	50	244	tak	tak	nie	-	-
3	50	244	tak	nie	-	-	-
0	50	50	tak	nie	-	-	-
1	50	50	tak	tak	tak	nie	-
1	40 z 60	200	tak	tak	tak	tak	nie
2	40 z 60	200	tak	nie	-	-	-
0	Pilecki i in. (2015)		nie	-	-	-	-
1	Pilecki i in. (2015)		tak	tak	nie	-	-

Tabela 3.4: Analogicznie jak Tab. 3.2, ale dla modu nieradialnego o  $\ell = 9$ .

$m$	$N_{\text{nocy}}$	$N_{\text{widm}}$	SNR				
			brak szumu	500	300	200	100
0	50	244	tak	nie	-	-	-
1	50	244	tak	tak	tak	nie	-
1	50	50	tak	tak	nie	-	-
0	40 z 60	200	tak	nie	-	-	-
1	40 z 60	200	tak	tak	tak	nie	-
2	40 z 60	200	tak	nie	-	-	-
4	40 z 60	200	tak	nie	-	-	-
1	Pilecki i in. (2015)		tak	tak	nie	-	-

W powyższej analizie nie zostały sprawdzone wszystkie kombinacje próbkowania, oraz geometrii modów (tj. kombinacje  $\ell$  i  $m$ ). Zostały one przeanalizowane w stopniu pozwalającym na określenie wpływu poszczególnych parametrów na możliwość detekcji modu nieradialnego. Największy wpływ na możliwość detekcji w danych z dodanym szumem ma rząd azymutalny modu. Dla pewnych wartości  $m$  nie jest możliwa detekcja, gdy do danych zostanie dodany szum nawet dla dużej liczby widm. Podczas przeprowadzania symulacji przyjęto założenie, że jedynie dwa mody są wzbudzone, a mod nieradialny ma określony stopień i rząd azymutalny. W rzeczywistości mody o różnych rzędach azymutalnych mogą być obecne w gwiazdzie i zachodzą oddziaływania pomiędzy poszczególnymi  $2\ell + 1$  składnikami multipletu. Jest to jednak nietrywialny problem i został on pominięty w przedstawionej analizie.

Bardzo istotnym czynnikiem wpływającym na możliwość detekcji jest wartość SNR. Dla rzędów modu, które mają relatywnie wysoką amplitudę, detekcja jest możliwa i zależy ona od liczby widm i wartości SNR. Mniejsza liczba widm skutkuje koniecznością uzyskania wysokiej wartości SNR. Wartość SNR, która pozwalałaby na pewną detekcję modu (o określonym  $m$ ), wynosi około 200 – 300. Otrzymanie tak dużej wartości wiąże się z wykorzystaniem instrumentów na teleskopach o dużych aperturach, jak na przykład instrumentu HARPS używanego na teleskopie o aperturze 3.6 metra (wykorzystanego w pracy [Nardetto i in. 2006](#)). Jednak istnieją techniki pozwalające na zwiększenie SNR. Taką techniką jest tzw. *Least-Squares Deconvolution*. Polega ona na uzyskaniu średniego profilu linii dla danego widma, oblicza się go na podstawie linii widmowych obecnych w danym widmie, zakładając, że linie te mogą być przedstawione za pomocą przeskalowanego średniego profilu ([Donati i in. 1997](#)). [Tkachenko i in. \(2013\)](#) zbadali zastosowanie tej metody do syntetycznych widm oraz do rzeczywistych obserwowanych widm. Pokazali oni, że z pomocą tej techniki można uzyskać wzrost SNR o czynnik 10. Wykorzystanie podobnej techniki mogłoby zwiększyć szanse wykrycia modów nieradialnych w analizie rzeczywistych widm Cefeid.

Analizując zebrane dane spektroskopowe, [Pilecki i in. \(2015\)](#) nie wykryli modów nieradialnych, jednak poszukiwanie takiej zmienności nie było celem ich analizy. Autorzy korzystali z widm o wysokiej rozdzielczości zebranych instrumentami HARPS oraz UVES. Większość wykorzystanych przez nich widm ma jednak SNR o wartościach poniżej 100. Biorąc również pod uwagę małą liczbę widm, wykrycie modu nie było możliwe w tym przypadku. Konieczna byłaby analiza pozwalająca na zwiększenie wartości SNR. Wówczas, przy założeniu, że mod jest możliwy do wykrycia (zależność od  $m$ ) można by przeprowadzić jego poszukiwania w widmach o wysokim SNR.

Potencjalna możliwość bezpośredniej detekcji zmienności związanej z modami nieradialnymi w Cefeidach klasycznych pokazana w niniejszym rozdziale, pozwala na podjęcie próby detekcji modów w rzeczywistych widmach oraz na zbadanie metod identyfikacji celem znalezienia najskuteczniejszych dla tego typu pulsacji. Jest to przyszły cel badań nad naturą dodatkowych modów w Cefeidach klasycznych oraz gwiazdach RR Lutni.

# Modelowanie gwiazd RR Lutni

W tym rozdziale przedstawione jest wykorzystanie jednoczesnych pulsacji w modach radialnych i nieradialnych gwiazd RR<sub>0.61</sub> w celu modelowania sejsmicznego. Jest to pierwsze takie modelowanie w literaturze.

## 4.1 Kod pulsacyjny

Gwiazdy RR Lutni są zaawansowanymi ewolucyjnie olbrzymami. Z tego względu ich struktura wewnętrzna znacznie się różni od struktury gwiazd ciągu głównego, w szczególności olbrzymy te mają bardzo skoncentrowane wnętrza i rozciągle otoczki. Jak pokazał [Epstein \(1950\)](#), pulsacje olbrzymów mają niewielkie amplitudy we wnętrzach, a na charakter pulsacji przeważający wpływ ma otoczka. [Dziembowski \(1977b\)](#) pokazał, że mody nieradialne o częstościach zbliżonych do modu fundamentalnego i pierwszego owertonu oraz o tempach narastania podobnego rzędu wielkości jak dla modów radialnych, także mogą być analizowane jedynie na podstawie struktury otoczki. Dzięki temu, aby uzyskać modele sejsmiczne dla olbrzymów, nie jest konieczne modelowanie pełnej struktury gwiazdy. Innymi słowy, do analizy niestabilności pulsacyjnej wystarczające jest modelowanie struktury otoczki i rozciąglej atmosfery.

[Paczyński \(1969\)](#) przedstawił równania opisujące strukturę otoczki przy założeniu atmosfery szarej i traktowaniu konwekcji za pomocą teorii drogi mieszania. Struktura otoczki jest następnie wykorzystywana w kodzie pulsacyjnym ([Dziembowski 1977b](#)). Informacje pochodzące z modelu otoczki gwiazdy są przekazywane do części kodu liczącej pulsacje na podstawie parametrów  $A_k$ , gdzie  $k = 1, 2, \dots, 13$ . Współczynniki te są opisane w pracy [Dziembowski \(1977b\)](#). Parametrami wejściowymi dla kodu modelującego otoczkę są masa,  $M$ , temperatura efektywna,  $T_{\text{eff}}$ , i jasność gwiazdy,  $L$ , a także zawartość metali,  $Z$ , oraz zawartość wodoru,  $X$ , w otoczce. Otoczka jest chemicznie jednorodna, sferycznie symetryczna, rotacja nie jest uwzględniana.

## 4.2 Badana próbka gwiazd

Do modelowania sejsmicznego zostały wybrane gwiazdy RR Lutni pulsujące w trzech modach jednocześnie. Wśród nich mogły się więc znaleźć gwiazdy RRc z dwoma dodatkowymi sygnałami lub RRd z jednym dodatkowym sygnałem. Założono przy tym, że obserwowane sygnały tworzące stosunek okresów z przedziału 0.60 – 0.65 pochodzą od harmonik modów nieradialnych o stopniach  $\ell = 8, 9$  zgodnie z modelem zaprezentowanym w pracy [Dziembowski \(2016\)](#). Jak przedyskutowano szczegółowo w rozdziale 2, jedynie sygnały należące do górnego i dolnego ciągu na diagramie Petersena odpowiadają harmonikom modów nieradialnych, a ciąg środkowy odpowiada liniowej kombinacji częstości modów o stopniach 8 i 9. W związku z tym,

z próbki gwiazd RR<sub>0.61</sub> przeanalizowanych w rozdziale 2, do analizy wybrałam jedynie takie gwiazdy, które pulsują w modzie pierwszym owertonowym i dodatkowo mają dwa sygnały należące do skrajnych ciągów na diagramie Petersena. Dodatkowym warunkiem selekcji gwiazd do analizy było, aby SNR obu sygnałów był wyższy niż 5. W ten sposób, nie rozważamy gwiazd ze słabszymi lub marginalnymi detekcjami, gdzie istnieje (niewielkie) ryzyko, że wykryty sygnał jest fluktuacją szumu. Dodatkowo, błąd wyznaczenia częstości sygnałów o wyższym SNR jest mniejszy. Nie było z kolei istotne, czy bezpośrednio wykryto mody nieradialne, ponieważ dopasowanie modeli sejsmicznych odbywało się na podstawie obserwowanych i teoretycznych stosunków okresów jakie tworzą okresy harmonik modów nieradialnych z okresem pierwszego owertonu. Z próbki z rozdziału 2 wybrałam zatem 32 gwiazdy RRc z grupy RR<sub>0.61</sub>. Dane dla tak wybranych gwiazd RRc zostały zebrane w Tab. 4.1. Tabela ta zawiera okres pierwszego owertonu oraz stosunek okresów,  $R_\ell$ , który tworzy harmonika modu nieradialnego o stopniu  $\ell$  wynoszącym 8 lub 9 z okresem pierwszego owertonu, zdefiniowany jako:

$$R_\ell = \frac{0.5P_\ell}{P_{10}}. \quad (4.1)$$

W tabeli podane są także SNR dla dodatkowych sygnałów. Na podstawie przeglądu literatury wyselekcjonowałam dodatkowe gwiazdy RR<sub>0.61</sub> pulsujące w co najmniej trzech modach. Dwie gwiazdy RRc z widocznymi harmonikami obu modów nieradialnych zostały znalezione w pracy Smolec i in. (2017). Przeanalizowałam również gwiazdy RR Lutni, dla których krzywe blasku zostały przygotowane przez Plachy i in. (2019) na podstawie danych z misji K2 dla kampanii nr 3, 4, 5 oraz 6. Z tej grupy wybrałam kolejnych 11 gwiazd RRc z dwoma modami nieradialnymi. Dane dla gwiazd RRc z gromady NGC 6362 wraz z danymi dla gwiazd z misji K2 są zebrane w Tab. 4.2. Łącznie do analizy wybranych zostało 45 trójmodalnych gwiazd RR<sub>0.61</sub> o oryginalnej klasyfikacji RRc.

Do analizy wybranych zostało także 11 gwiazd RRd należących do grupy RR<sub>0.61</sub>, które zostały przedstawione w rozdziale 2. We wszystkich 11 gwiazdach RRd, dodatkowe sygnały odpowiadają co najmniej jednemu z dwóch skrajnych ciągów na diagramie Petersena. Nie zostało nałożone na nie dodatkowe kryterium o minimalnej wartości SNR. Spośród jedenastu gwiazd RRd, jedna gwiazda, OGLE-BLG-RRLYR-10796, ma dwa dodatkowe sygnały odpowiadające harmonikom obu modów nieradialnych. Jest ona zatem czteromodalna. Na podstawie przeglądu literatury wyselekcjonowałam kolejne gwiazdy RRd z wzbudzonym dodatkowym modem nieradialnym. Spośród gwiazd badanych w pracy Jurcsik i in. (2015) wybrałam trzy gwiazdy. Dwie z nich to gwiazdy RRd z sygnałem odpowiadającym harmonice modu o stopniu  $\ell = 9$ . Trzecia gwiazda to unikalna czteromodalna gwiazda RR Lutni, V13, w której Jurcsik i in. (2015) zidentyfikowali trzy mody radialne, fundamentalny, pierwszy i drugi owerton, oraz harmonikę modu nieradialnego o  $\ell = 9$ . Ponadto, trzy gwiazdy RRd z jednym dodatkowym sygnałem, odpowiadającym harmonikom modów nieradialnych, zostały znalezione na podstawie danych z teleskopów kosmicznych. Jedna z nich została znaleziona na podstawie danych *CoRoT* (Chadid 2012), a dwie w danych z teleskopu *Kepler* (Molnár i in. 2015). Uwzględniłam także pierwszą gwiazdę należącą do grupy RR<sub>0.61</sub>, czyli AQ Leo (Gruberbauer i in. 2007). Dane dla przedstawionych gwiazd RRd zostały zebrane w Tab. 4.3. Tabela ta zawiera okresy modu fundamentalnego, pierwszego owertonu oraz stosunek okresów,  $R_\ell$ .

### 4.3 Siatka modeli

Pierwszym krokiem analizy było policzenie siatki modeli za pomocą opisanego otoczkowego kodu pulsacyjnego (Dziembowski 1977b). Parametrami wymaganymi do obliczeń są masa

Tabela 4.1: Gwiazdy RRc z dwoma dodatkowymi sygnałami odpowiadającymi harmonikom modów nieradialnych. W kolejnych kolumnach są przedstawione: nazwa gwiazdy w danych OGLE (z pominiętą częścią nazwy OGLE-BLG-RRLYR-), okres pierwszego owertonu, stosunki okresów harmonik obu modów nieradialnych z pierwszym owertonem (częstość harmonik modów nieradialnych pochodzi z dopasowania funkcji Gaussa, patrz tekst) oraz wartości SNR dla harmonik modów nieradialnych.

Nazwa	$P_{1O}$ [d]	$R_8$	$R_9$	$SNR_8$	$SNR_9$
5202	0.31386605(5)	0.63564	0.61272	5.7	5.3
6352	0.3162666(2)	0.63122	0.61319	8.2	12.8
6802	0.31830253(5)	0.63138	0.61264	5.0	7.3
6922	0.30877929(3)	0.63080	0.61256	5.2	6.7
7047	0.30496436(2)	0.63019	0.61229	5.1	5.5
7665	0.26829993(4)	0.63135	0.61897	5.2	9.1
7803	0.31390033(3)	0.63113	0.61235	5.7	14.7
7806	0.31899507(3)	0.63125	0.61310	6.4	7.2
8002	0.30879120(3)	0.63060	0.61264	5.4	8.0
8475	0.31094850(5)	0.63113	0.61316	7.5	9.9
8799	0.31734930(3)	0.63105	0.61296	5.5	8.2
8826	0.31251553(3)	0.63091	0.61202	7.5	7.4
8920	0.31500873(6)	0.63109	0.61316	5.2	6.9
8980	0.31356147(3)	0.63124	0.61259	5.2	6.8
9444	0.32376783(4)	0.63123	0.61332	6.7	5.0
9733	0.31378022(3)	0.63130	0.61239	6.1	8.2
10119	0.31540045(3)	0.63111	0.61304	6.1	5.3
10262	0.31622131(1)	0.63114	0.61309	6.9	6.4
10534	0.31529923(3)	0.63154	0.61325	7.5	8.6
10614	0.31448656(4)	0.63107	0.61268	5.3	6.3
11072	0.31601750(4)	0.63119	0.61306	5.7	5.4
11547	0.30619293(2)	0.63067	0.61146	5.4	12.3
11621	0.31723543(4)	0.63115	0.61308	5.5	5.8
11728	0.31518348(3)	0.63122	0.61329	6.0	7.0
11913	0.31835441(3)	0.63121	0.61299	9.1	9.4
12261	0.30506798(2)	0.63101	0.61309	6.8	18.1
12769	0.31341085(2)	0.63128	0.61319	6.5	13.6
12776	0.31535057(2)	0.63100	0.61317	5.1	7.3
12972	0.32094619(3)	0.63083	0.61254	6.1	8.1
13156	0.31633834(3)	0.63129	0.61291	6.0	9.3
31736	0.30524110(3)	0.63093	0.61297	7.0	7.4
32213	0.24889440(5)	0.63232	0.61275	5.9	5.9

gwiazdy, jej jasność, temperatura efektywna oraz skład chemiczny podany w postaci obfitości metali,  $Z$ , oraz obfitości wodoru,  $X$ . W obliczonej siatce modeli masy przyjmują wartości z przedziału  $0.5 - 0.9 M_{\odot}$  z krokiem  $0.01 M_{\odot}$ , jasności przyjmują wartości  $\log L/L_{\odot} \in \langle 1.3, 1.8 \rangle$  z krokiem  $0.01$  dex, temperatury efektywne mają wartości  $\log T_{\text{eff}} \in \langle 3.75, 3.91 \rangle$  z krokiem  $0.005$  dex, a metaliczności przyjmują wartości z przedziału od  $[\text{Fe}/\text{H}] = -3$  do  $+0.1$  z krokiem  $0.05$  dex. Obfitości wodoru i metali,  $X$  i  $Z$ , zostały obliczone na podstawie metaliczności,  $[\text{Fe}/\text{H}]$ ,

Tabela 4.2: Gwiazdy RRc z dwoma dodatkowymi sygnałami odpowiadającymi harmonikom modów nieradialnych dla dwóch gwiazd z gromady NGC 6362 (Smolec i in. 2017) oraz dla gwiazd wyselekcjonowanych przeze mnie na podstawie danych z misji K2 (Plachy i in. 2019). W kolejnych kolumnach są przedstawione: nazwa gwiazdy, okres pierwszego owertonu oraz stosunki okresów dla harmonik obu modów nieradialnych.

Nazwa	$P_{10}$ [d]	$R_8$	$R_9$
NGC 6362 V17	0.31461	0.63089	0.61165
NGC 6362 V33	0.30642	0.63089	0.61300
EPIC 210438688	0.3280081(9)	0.63115	0.61214
EPIC 211701322	0.3391090(9)	0.63169	0.61400
EPIC 211728918	0.3394932(6)	0.63211	0.61481
EPIC 212316775	0.3304611(6)	0.63231	0.61420
EPIC 212347262	0.3342333(8)	0.63195	0.61429
EPIC 212352472	0.3359155(8)	0.63203	0.61557
EPIC 212419731	0.3355586(7)	0.63181	0.61520
EPIC 212448152	0.331029(1)	0.63167	0.61502
EPIC 212613425	0.368725(1)	0.63101	0.61279
EPIC 212684145	0.3524773(3)	0.63214	0.61513
EPIC 212824246	0.313374(1)	0.63091	0.61315

korzystając z wzorów:

$$Z = 10^{[\text{Fe}/\text{H}]} Z_{\odot} \quad (4.2)$$

$$Y = Y_p - \frac{\Delta Y}{\Delta Z} Z, \quad (4.3)$$

gdzie przyjęto pierwotną zawartość helu  $Y_p = 0.2485$  (Asplund i in. 2009), a  $\Delta Y/\Delta Z$  to iloraz opisujący wzbogacenie materii w hel (tzw. *helium enrichment law*) ustalony na 1.5 (Choi i in. 2016). Dla Słońca obfitość metali została przyjęta na podstawie pracy Asplund i in. (2009) jako  $Z_{\odot} = 0.0134$ . Przyjęte kroki w siatce modeli dla wartości parametrów fizycznych wpływają na możliwą dokładność oszacowania parametrów fizycznych modelowanych gwiazd. Wykorzystanie siatki modeli pozwala na wstępne oszacowanie parametrów badanych gwiazd, które może być później wykorzystane w celu dokładniejszego indywidualnego modelowania poszczególnych obiektów.

Spośród całej obliczonej siatki modeli, zostały wybrane jedynie te modele, które są zlokalizowane w granicach teoretycznego klasycznego pasa niestabilności. Ze względu na przybliżenie wzmrożonej konwekcji wykorzystane w kodzie pulsacyjnym, nie było możliwości otrzymania czerwonej granicy pasa niestabilności (przybliżone położenie niebieskiej granicy jest możliwe do otrzymania). W związku z tym, wykorzystano granice pasa niestabilności wyznaczone w pracy Marconi i in. (2015), w której wykorzystano kod pulsacyjny uwzględniający oddziaływanie konwekcji na pulsacje (Bono i Stellingwerf 1994), dzięki czemu możliwe jest wyznaczenie położenia czerwonej granicy. Położenie granic pasa niestabilności jest zależne od wartości metaliczności. W pracy Marconi i in. (2015) podane są, w funkcji metaliczności, wyrażenia na położenie niebieskiej granicy dla pulsacji w pierwszym owertonie i czerwonej granicy dla pulsacji w modzie fundamentalnym. Dla każdego zestawu parametrów rozważanych modeli, oddzielnie sprawdzono, czy odpowiada on położeniu modelu wewnątrz pasa niestabilności.



Tabela 4.3: Gwiazdy RRd z dodatkowym sygnałem odpowiadającym harmonice modu nieradialnego. W kolejnych kolumnach są przedstawione: nazwa gwiazdy, okres modu fundamentalnego i pierwszego owertonu, stosunek okresów jaki tworzy harmonika modu nieradialnego z okresem pierwszego owertonu oraz praca z której pochodzą wyznaczenia częstości dla danej gwiazdy. Gwiazdy pochodzące z danych OGLE mają pominiętą część nazwy (OGLE-BLG-).

Nazwa	$P_F$ [d]	$P_{10}$ [d]	$R_9$	$R_8$	Źródło
RRLYR-09258	0.3793278(1)	0.27766821(4)	-	0.63079	Netzel i Smolec (2019)
RRLYR-10369	0.4348707(2)	0.32170650(5)	-	0.63179	Netzel i Smolec (2019)
RRLYR-10744	0.478116(1)	0.35576412(8)	0.61417	-	Netzel i Smolec (2019)
RRLYR-10796*	0.4313758(2)	0.31909935(4)	0.61243	0.63087	Netzel i Smolec (2019)
RRLYR-11234	0.474381(4)	0.35300247(8)	0.61403	-	Netzel i Smolec (2019)
RRLYR-11981	0.5901921(4)	0.43938460(5)	0.61656	-	Netzel i Smolec (2019)
RRLYR-13198	0.434438(1)	0.32174412(5)	-	0.63158	Netzel i Smolec (2019)
RRLYR-13666	0.4134416(2)	0.30495950(6)	-	0.63155	Netzel i Smolec (2019)
RRLYR-13721	0.457128(1)	0.3393893(6)	-	0.63591	Netzel i Smolec (2019)
RRLYR-14029	0.4299453(3)	0.31798614(6)	0.61275	-	Netzel i Smolec (2019)
RRLYR-14031	0.576121(1)	0.4297653(2)	0.61847	-	Netzel i Smolec (2019)
CoRoT 0101368812	0.48804	0.36360	0.61409	-	Chadid (2012)
EPIC 60018653	0.53943	0.40231	0.61634	-	Molnár i in. (2015)
EPIC 60018662	0.55900	0.41745	0.61701	-	Molnár i in. (2015)
V13*	0.47950	0.35072	0.61370	-	Jurcsik i in. (2015)
V68	0.47850	0.35597	0.61450	-	Jurcsik i in. (2015)
V87	0.48017	0.35749	0.61770	-	Jurcsik i in. (2015)
AQ Leo	0.54976	0.41014	0.62105	-	Gruberbauer i in. (2007)

\* - gwiazdy, dla których w widmach częstości znajdują się więcej niż trzy niezależne sygnały. Gwiazdy te są omówione dokładniej w tekście.

Kod pulsacyjny wymaga podania przybliżonej wartości częstości bezwymiarowej dla modu nieradialnego. Aby ją otrzymać, najpierw liczone jedynie pulsacje radialne. Następnie, na podstawie otrzymanej wartości okresu pierwszego owertonu, szacowano wartość okresu modu nieradialnego. Wykorzystano w tym celu zależność stosunku okresów od okresu pierwszego owertonu dopasowaną do obserwowanej próbki gwiazd RR<sub>0,61</sub>. Dopasowanie przedstawione jest na Rys. 4.1. W wyniku tej analizy uzyskano następujące zależności:

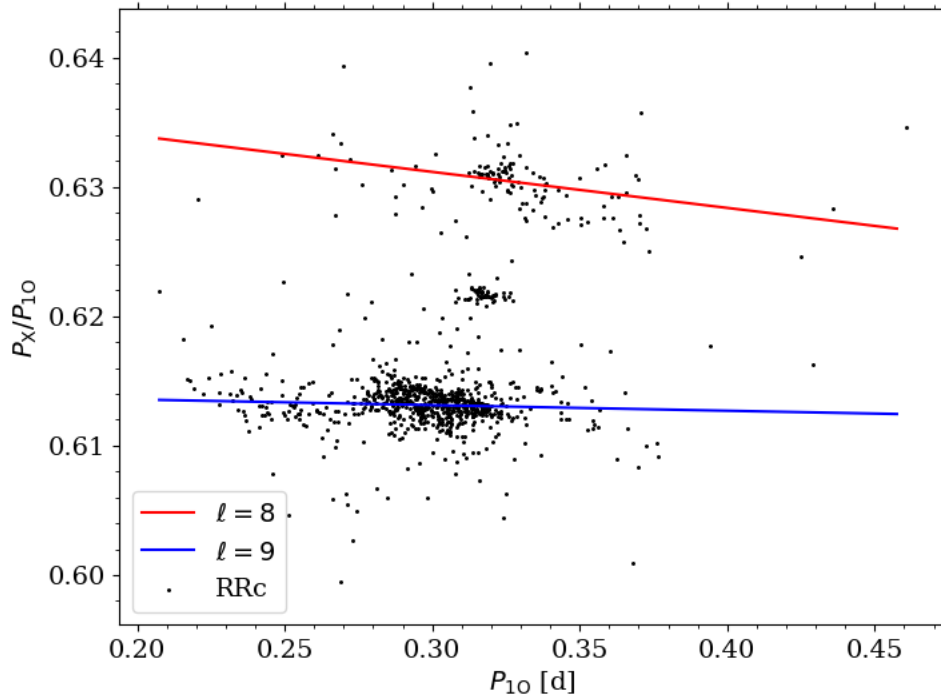
$$R_8 = -0.02782713P_{10}[\text{d}] + 0.6395014, \quad (4.4)$$

$$R_9 = -0.0043501924P_{10}[\text{d}] + 0.6144396. \quad (4.5)$$

Dla danego modelu, wyznaczony z równań 4.4 lub 4.5 okres, był przeliczany na częstość bezwymiarową  $\sigma$ , zgodnie ze wzorem:

$$\sigma = \frac{1}{P} \sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}}, \quad (4.6)$$

gdzie  $\bar{\rho}$  to średnia gęstość gwiazdy, a  $G$  to stała grawitacji. W modelu z pracy Dziembowski (2016), obserwowane mody nieradialne to te złapane w otoczce gwiazdy o najwyższych tempach narastania. Aby wybrać te mody, dla tych samych parametrów fizycznych liczone model podając

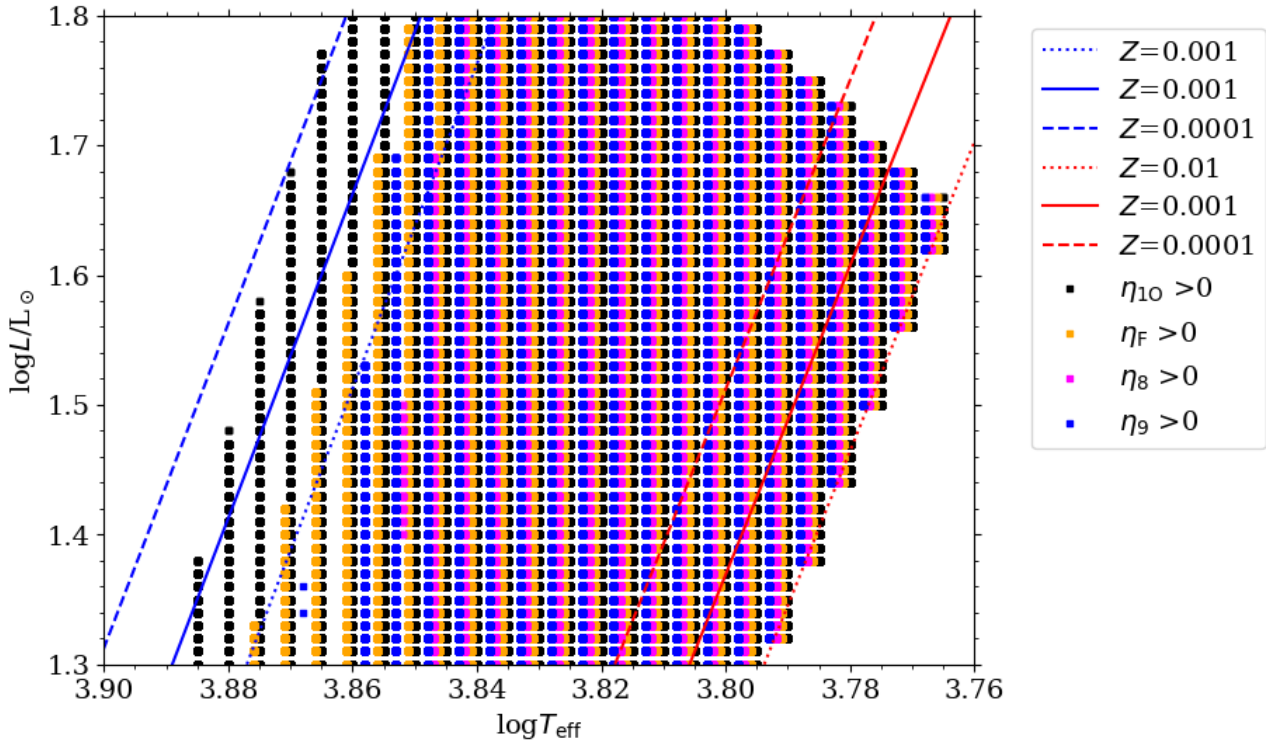


Rysunek 4.1: Dopasowanie zależności stosunku okresów w funkcji okresu pierwszego owertonu. Linie odpowiadają równaniom 4.4 i 4.5. Dopasowanie uzyskano na podstawie gwiazd opisanych w rozdziale 2.

początkowe wartości bezwymiarowej częstości z przedziału od  $\sigma - 0.1$  do  $\sigma + 0.1$ , z krokiem  $\Delta\sigma = 0.002$ , a zatem liczono 100 modeli. Rachunki prowadziły do znalezienia kilkunastu modów nieradialnych o zadanym stopniu i nieznacznie różnych częstościach, spośród których wybierano mod o najwyższym tempie narastania.

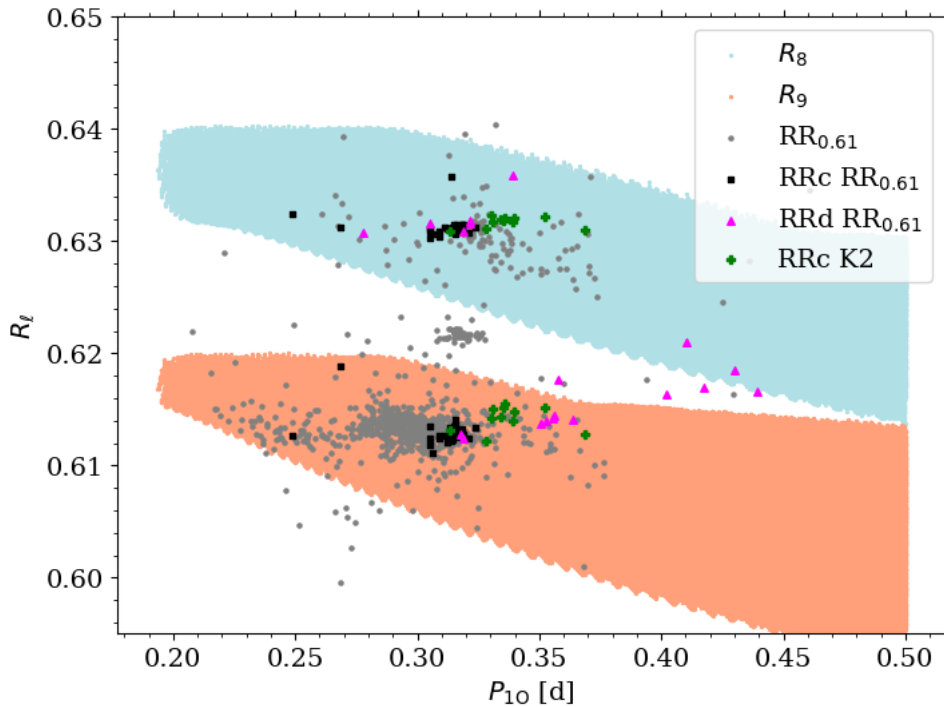
Otoczkowy kod pulsacyjny zwraca wyniki w postaci okresów i temp narastania dla modu fundamentalnego, pierwszego owertonu i trzech modów nieradialnych o stopniach 8 lub 9. Do porównania z danymi obserwacyjnymi wykorzystano stosunek okresów jaki tworzą harmoniki modów nieradialnych z pierwszym owertonem; z dwóch powodów. Po pierwsze, znacznie częściej w obserwacjach wykrywa się sygnały odpowiadające harmonikom, dzięki czemu próbka wejściowa może być liczniejsza. Po drugie, w widmie częstości struktury odpowiadające harmonikom są typowo węższe, dzięki czemu łatwiej jest wyznaczyć częstości opisujące dane obserwacyjne (patrz rozdział 2). Jak również przedyskutowano w pracy Dziembowski (2016), wykorzystanie harmonik do określenia częstości modu nieradialnego jest bardziej wiarygodne, ze względu na wzajemne oddziaływanie  $2\ell + 1$  składników multipletu dla modu nieradialnego, które kontrybuują do złożonej struktury obserwowanej w widmie częstości dla modów nieradialnych (Buchler i in. 1995). Analiza liniowa nie uwzględnia również nieliniowych sprzężeń składników multipletu, a rotacja została zaniedbana.

Wygenerowana siatka zawiera 2 219 295 modeli gwiazd RR Lutni dla różnych wartości mas, jasności, temperatur efektywnych i metaliczności, które zawierają się w granicach pasa niestabilności określonego w pracy Marconi i in. (2015). Dodatkowym kryterium nałożonym na modele był warunek, aby okres pierwszego owertonu był krótszy niż 0.5 dnia, ponieważ w badanej próbce gwiazd RR<sub>0,61</sub> nie obserwuje się gwiazd o dłuższych okresach. Ten warunek zmniejszył liczbę modeli w siatce do 1 969 228. Na Rys. 4.2 przedstawiona jest siatka modeli w formie diagramu HR. Na rysunku zaznaczono te modele z siatki, w których mod fundamentalny jest



Rysunek 4.2: Siatka modeli przedstawiona w formie diagramu HR. Czarne punkty oznaczają modele gwiazd, w których liniowo niestabilny jest mod pierwszy owertonowy. Pomarańczowe punkty oznaczają modele z liniowo niestabilnym modem fundamentalnym. Różowe punkty odpowiadają modelom z liniowo niestabilnym modem nieradialnym o stopniu  $\ell = 8$ , natomiast modele z liniowo niestabilnym modem nieradialnym o stopniu  $\ell = 9$  są zaznaczone za pomocą niebieskich punktów. Każdy zestaw kolorowych punktów odpowiada tej samej temperaturze efektywnej, określonej przez czarny punkt. Pozostałe zostały przesunięte o stałą w celu lepszej wizualizacji danych. Za pomocą czerwonej i niebieskiej przerywanej linii zaznaczono czerwoną i niebieską granicę klasycznego pasa niestabilności dla obfitości metali  $Z=0.0001$ , za pomocą ciągłych linii granice dla obfitości metali  $Z=0.001$ , a za pomocą kropkowanych linii dla obfitości  $Z=0.01$  (na podstawie [Marconi i in. 2015](#)).

wzbudzony (pomarańczowe punkty), pierwszy owerton jest wzbudzony (czarne punkty), mod nieradialny o stopniu 8 jest wzbudzony (różowe punkty) lub mod nieradialny o stopniu 9 jest wzbudzony (niebieskie punkty). Wzbudzenie modu było określane na podstawie wartości temp narastania  $\eta$  z kodu pulsacyjnego. By poprawić czytelność rysunku, kolorowe punkty wskazujące na wzbudzenie różnych modów w tym samym modelu są nieznacznie przesunięte względem siebie w temperaturze efektywnej. Dodatkowo zaznaczono granice klasycznego pasa niestabilności dla trzech obfitości metali  $Z = 0.01$ ,  $Z = 0.001$  oraz  $Z = 0.0001$  ([Marconi i in. 2015](#)). Do dopasowania modeli do wybranych gwiazd RRc wybrano te modele, w których wzbudzony jest pierwszy owerton oraz oba mody nieradialne. Innymi słowy, musiały zostać spełnione warunki  $\eta_{10} > 0$ ,  $\eta_8 > 0$  oraz  $\eta_9 > 0$ . Takie warunki zmniejszają liczbę modeli do 1 564 139. Przy modelowaniu gwiazd RRd, wybrano dwa zestawy modeli. W pierwszym zestawie warunkiem było, aby wzbudzony był mod fundamentalny, pierwszy owerton oraz mod nieradialny o stopniu 8. Liczba modeli wynosi wówczas 771 543. W drugim zestawie warunkiem było, aby niestabilne były oba mody radialne i mod nieradialny o stopniu 9. Wówczas liczba modeli to 1 185 513. Gwiazda czteromodalna V13 była rozważana jako trójmodalna F+1O z modem nieradialnym



Rysunek 4.3: Siatka modeli przedstawiona na diagramie Petersena, z której wybrano modele z wzbudzonym modem pierwszym owertonowym. Niebieskie punkty odpowiadają modelom z dodatkowo wzbudzonym modem nieradialnym o stopniu  $\ell = 8$ , a czerwone punkty modelom z wzbudzonym modem nieradialnym o stopniu  $\ell = 9$ . Szare punkty odpowiadają obserwowanym gwiazdom RRc z grupy RR<sub>0.61</sub>, natomiast czarne, zielone i różowe punkty to gwiazdy RRc i RRd wstępnie wybrane do modelowania.

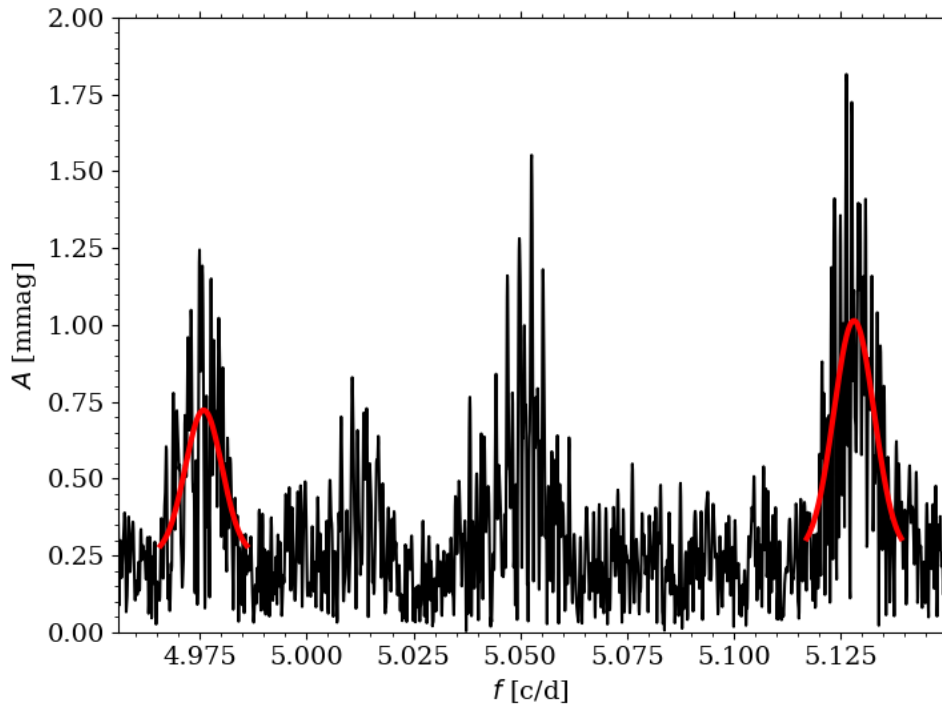
$\ell = 9$ <sup>1</sup>, natomiast gwiazda RRd, OGLE-BLG-RRLYR-10796, z dwoma modami nieradialnymi była rozważana w ramach obu zestawów modeli dla gwiazd RRd niezależnie, a następnie uzyskane wyniki porównano.

Na Rys. 4.3 przedstawiono siatkę modeli w formie diagramu Petersena. Zaprezentowano jedynie modele, w których wzbudzony jest radialny pierwszy owerton, a także nieradialny mod o stopniu 8 (niebieskie punkty) lub stopniu 9 (czerwone punkty). Dodatkowo zaznaczono gwiazdy RR<sub>0.61</sub> znalezione w rozdziale 2 (szare punkty). Trójmodalne gwiazdy RR<sub>0.61</sub> z Tab. 4.1 i Tab. 4.2 zostały zaznaczone za pomocą czarnych kwadratów (gwiazdy z misji K2 zostały zaznaczone oddzielnie za pomocą zielonych symboli). Za pomocą różowych symboli zaznaczono gwiazdy RRd z Tab. 4.3.

Na podstawie Rys. 4.3 wykluczono z dalszej analizy cztery gwiazdy znajdujące się pomiędzy ciągami wyznaczonymi przez modele teoretyczne, ponieważ dopasowanie częstości modów nieradialnych nie jest w przypadku tych gwiazd możliwe. Są to OGLE-BLG-RRLYR-11981, EPIC 60018653, EPIC 60018662 oraz V87 z gromady M3 (patrz dyskusja w rozdziale 4.5). Łącznie zatem, do modelowania wykorzystano 45 gwiazd RRc oraz 14 gwiazd RRd.

Interesujące są dwie gwiazdy RRd o najdłuższych okresach pierwszego owertonu. Są to gwiazdy AQ Leo oraz OGLE-BLG-RRLYR-14031. Obserwowane stosunki okresów wynoszą odpowiednio 0.6211 oraz 0.6185. Na podstawie stosunków okresów, AQ Leo powinna zostać sklasyfikowana jako gwiazda należąca do środkowego ciągu, czyli obserwowany dodatkowy sygnał odpowiadałby kombinacji liniowej modów nieradialnych, natomiast OGLE-BLG-RRLYR-

<sup>1</sup>W siatce nie były uwzględnione okresy drugiego owertonu.



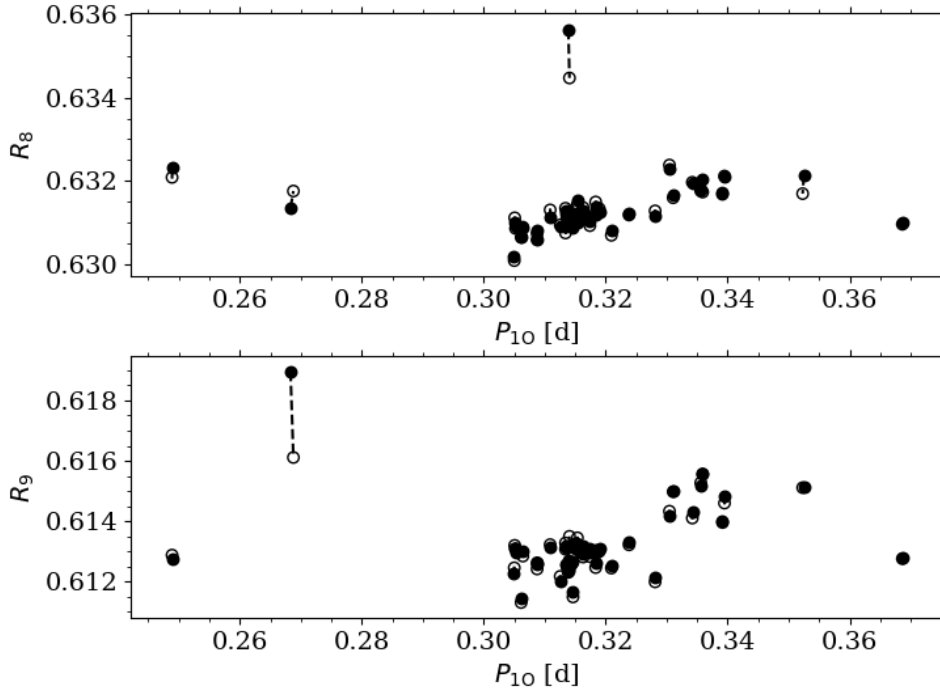
Rysunek 4.4: Przykład dopasowania funkcji Gaussa (czerwone krzywe) do sygnałów pochodzących ze skrajnych ciągów na diagramie Petersena dla gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-06802.

14031 jako gwiazda z obserwowaną harmoniką modu nieradialnego o  $\ell = 9$  (ciąg dolny na diagramie Petersena, patrz rozdział 2). Jednak porównując położenie tych gwiazd na diagramie Petersena z położeniem policzonych ciągów modeli okazuje się, że sygnały w obu gwiazdach najpewniej odpowiadają harmonikom modu nieradialnego o stopniu  $\ell = 8$  i taką klasyfikację przyjęto w dalszym ich modelowaniu.

Ze względu na dużą zmienność sygnałów związanych z modami nieradialnymi, w widmie częstości ich harmoniki typowo pojawiają się w formie grupy sygnałów, lokalnej nadwyżki mocy (patrz rozdział 2). Wyznaczenie konkretnej częstości opisującej harmonikę modu nieradialnego nie jest oczywiste. Można ją określić na kilka sposobów. Jednym z nich jest przyjmowanie najwyższego sygnału w grupie w celu określenia reprezentatywnej częstości – jak zrobiono w rozdziale 2. Drugim sposobem na określenie reprezentatywnej częstości jest dopasowanie funkcji Gaussa do grupy sygnałów i przyjęcie częstości odpowiadającej maksimum funkcji. Przykład dopasowania funkcji Gaussa dla jednej z gwiazd RRc, OGLE-BLG-RRLYR-06802, jest przedstawiony na Rys. 4.4. Dopasowanie funkcji Gaussa zostało wykorzystane w przypadku gwiazd RRc z Tab. 4.1 (w Tabeli podano wartości stosunków okresów odpowiadające dopasowaniom funkcji Gaussa).

W przypadku gwiazd wyselekcjonowanych na podstawie danych z misji K2 jako reprezentatywną częstość harmoniki modu nieradialnego przyjęto wartość częstości sygnału o najwyższej amplitudzie. Ze względu na krótki okres obserwacji ( $\Delta T < 80$  dni), szerokie struktury harmonik nie pojawiają się w widmie. W przypadku gwiazd RRc z gromady NGC 6362 oraz gwiazd RRd (Tab. 4.2 i Tab. 4.3) wykorzystano również częstość najwyższego sygnału ze względu na to, że dla gwiazd z literatury tylko takie wartości są dostępne.

Metoda wyboru modelu najlepiej odtwarzającego obserwowane częstości różni się dla gwiazd RRc i RRd. Zawsze jednak w dopasowaniu korzystano z okresu pierwszego owertonu (lub również modu fundamentalnego w przypadku gwiazd RRd) oraz stosunków okresów jakie tworzą



Rysunek 4.5: Porównanie obserwowanych i teoretycznych okresów i stosunków okresów dla gwiazd RRc z grupy RR<sub>0.61</sub>. Dla każdej z gwiazd przedstawione są dwa symbole połączone czarną linią. Pełne symbole odpowiadają wartościom obserwowanym, natomiast puste odpowiadają wartościom teoretycznym wynikającym z modelu o najlepszym dopasowaniu. Przerywana linia oznacza przypadki, w których dopasowanie nie jest satysfakcjonujące.

harmoniki modów nieradialnych z okresem pierwszego owertonu. W celu dopasowania modelu minimalizowano wartość  $D^2$ :

$$D^2 = \left( \frac{P_F^m}{P_F^o} - 1 \right)^2 + \left( \frac{P_{10}^m}{P_{10}^o} - 1 \right)^2 + \left( \frac{R_8^m}{R_8^o} - 1 \right)^2 + \left( \frac{R_9^m}{R_9^o} - 1 \right)^2, \quad (4.7)$$

gdzie ‘m’ odnosi się do wartości wynikających z modelu, a ‘o’ do wartości obserwowanych. Uwzględniano człony zawierające okresy sygnałów dopasowywanych dla danej gwiazdy. Sprawdzono również inne formy minimalizowanego wyrażenia, oparte m.in. na bezpośrednim porównywaniu okresów, uzyskując zasadniczo identyczne wyniki.

## 4.4 Wyniki

Różnice pomiędzy teoretycznymi i obserwowanymi wartościami okresów i stosunków okresów dla gwiazd RRc są przedstawione na diagramie Petersena na Rys. 4.5. Dla każdej gwiazdy przedstawione są dwa symbole, z których jeden odpowiada wartościom obserwowanym (pełne symbole) a drugi wartościom otrzymanym z modelu (puste symbole). Dla każdej gwiazdy oba symbole są ze sobą połączone, dzięki czemu widać jak dokładnie modele są w stanie odtworzyć obserwowane gwiazdy RR<sub>0.61</sub>. Na Rys. 4.5 widać także, że wartości teoretyczne stosunków okresów mogą być zarówno większe jak i mniejsze od obserwowanych, a zatem nie widać systematycznych różnic. Na podstawie tego porównania wykluczono z dalszej analizy trzy gwiazdy: OGLE-BLG-RRLYR-05202, OGLE-BLG-RRLYR-07665 oraz EPIC 212684145, które mają wyraźnie większe różnice między modelowymi i obserwowanymi wartościami okresów i stosunków



okresów. Za dobrze dopasowane modele uznano te, dla których wartość parametru  $D^2$  jest niższa niż  $5 \cdot 10^{-7}$  ( $D \lesssim 7 \cdot 10^{-4}$ ). Możliwe przyczyny braku satysfakcjonujących rozwiązań dla niektórych gwiazd będą przedyskutowane w rozdziale 4.5

Różnice pomiędzy teoretycznymi i obserwowanymi wartościami dla gwiazd RRd są przedstawione na diagramie Petersena na Rys. 4.6. Dla trzech gwiazd, spośród ośmiu gwiazd RRd z modem  $\ell = 8$ , najlepsze dopasowania charakteryzują duże wartości parametru  $D^2$  rzędu  $10^{-5}$ , co oznacza że okresy oraz stosunki okresów są odtworzone niewystarczająco dokładnie. Są to OGLE-BLG-RRLYR-13721, OGLE-BLG-RRLYR-14031 oraz AQ Leo. Tym samym, nie udało się uzyskać satysfakcjonujących modeli dla wszystkich wstępnie wyselekcjonowanych gwiazd RRd o okresie pierwszego owertonu dłuższym niż 0.4 dnia. W przypadku gwiazd RRd z dodatkowym modem o stopniu 9, w próbie wejściowej znajdowało się 7 gwiazd i dla wszystkich znaleziono satysfakcjonujące dopasowania (wartość parametru  $D^2$  niższa niż  $5 \cdot 10^{-7}$ ).

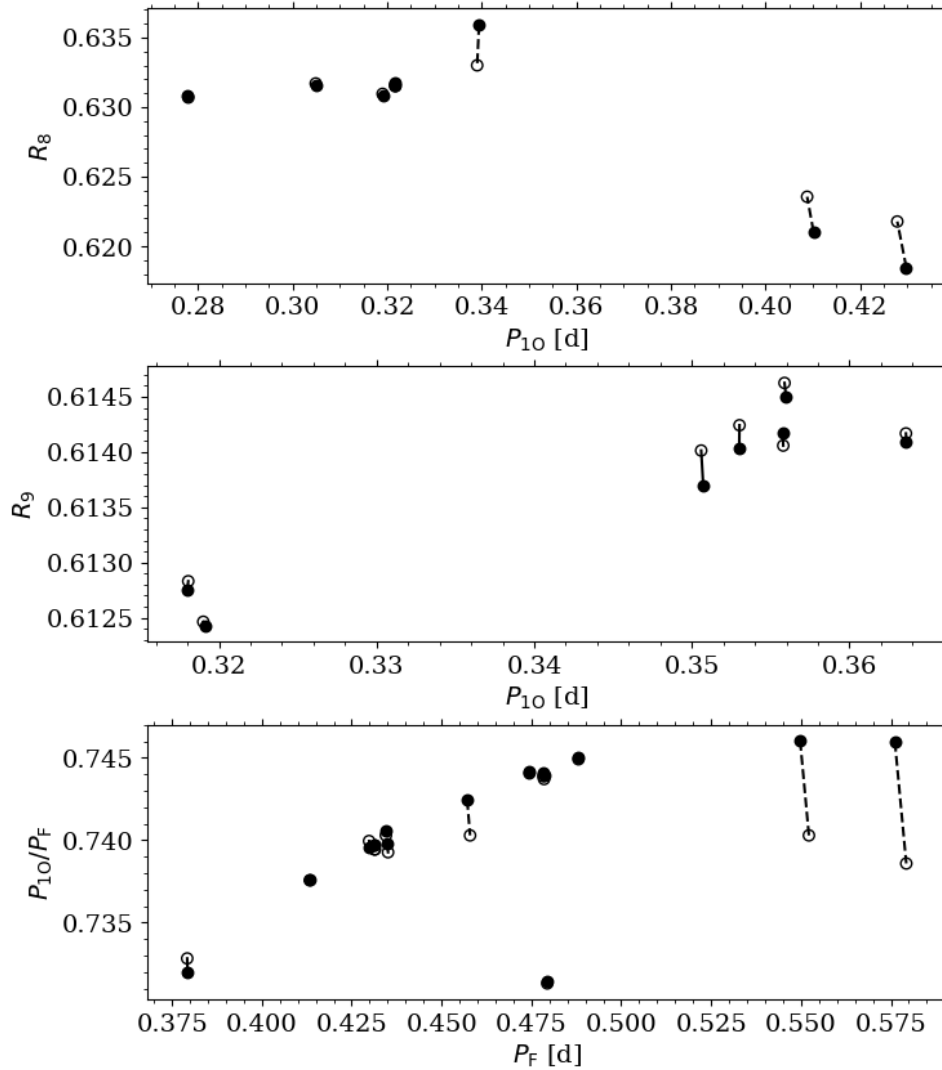
Gwiazda czteromodalna, OGLE-BLG-RRLYR-10796, była rozważana niezależnie dla obu harmonik modów nieradialnych. Dopasowanie do harmoniki modu o  $\ell = 8$  ma parametr  $D^2$  rzędu  $10^{-7}$ . W przypadku dopasowania do harmoniki modu o  $\ell = 9$ , jest on rzędu  $10^{-8}$ . Oba dopasowania prowadzą do tego samego rozwiązania o tych samych parametrach fizycznych.

Parametry fizyczne dobrze dopasowanych modeli dla gwiazd RRc, okresy i stosunki okresów, oraz wartości parametru  $D^2$  są zebrane w Tab. 4.4. Pierwszy rząd dla danej gwiazdy oznacza modelowe wartości, a drugi obserwowane (dla okresów i stosunków okresów).

Parametry fizyczne oraz okresy i stosunki okresów dla gwiazd RRd z satysfakcjonującymi rozwiązaniami są zabrane w Tab. 4.5. Pierwsza część tabeli odpowiada gwiazdom RRd, w których dodatkowy mod nieradialny ma stopień 8, natomiast druga część tabeli odpowiada gwiazdom z modem o stopniu 9. Konstrukcja tabeli jest analogiczna do tabeli opisanej powyżej dla gwiazd RRc. Gwiazda OGLE-BLG-RRLYR-10796 znajduje się w obu częściach tabeli.

Analizując uzyskane parametry fizyczne modelowanych gwiazd należy pamiętać, że mogą one nie być reprezentatywne dla wszystkich gwiazd RR Lutni. Badano specyficzne gwiazdy, tzn. gwiazdy RR Lutni z wzbudzonymi równocześnie modami nieradialnymi (w przypadku gwiazd RRc z równocześnie wzbudzonymi dwoma modami nieradialnymi). Ta konkretnie selekcja modów, może być możliwa jedynie dla dość specyficznych warunków i parametrów fizycznych, które niekoniecznie są reprezentatywne dla całości gwiazd RR Lutni.

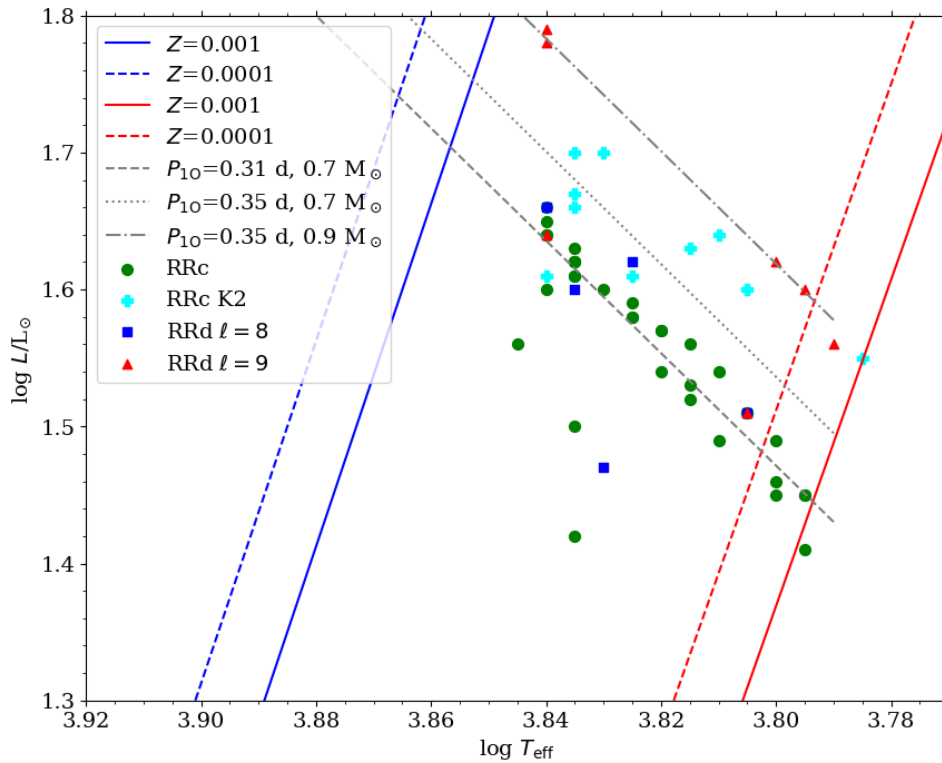
Parametry modeli dla gwiazd RRc i RRd, dla których możliwe było znalezienie dobrze pasującego modelu są przedstawione na diagramie HR na Rys. 4.7. Modele dla gwiazd RRc zajmują większą część przedziału temperatur efektywnych odpowiadających szerokości pasa niestabilności, jednak nie sięgają niebieskiej granicy. Wartość temperatury efektywnej powyżej której nie znalazł się żaden model odpowiadający obserwacjom wynosi około 7000 K. Jest to związane z brakiem modeli ze wzbudzonymi modami nieradialnymi o stopniach 8 i 9 blisko niebieskiej granicy, co jest wyraźnie widoczne na Rys. 4.2. Kilka gwiazd jest położonych blisko czerwonej granicy dla modu F. Jednak należy zwrócić uwagę, że przedstawiona granica odpowiada jednej wartości metaliczności. Dodatkowo, wyznaczenie czerwonej granicy obarczone jest niepewnościami związanymi z modelowaniem sprzężenia pulsacji i konwekcji, a zatem położenie jest jedynie przybliżone. Gwiazdy RRd ze wzbudzonym modem nieradialnym o stopniu 8 zajmują ten sam rejon pasa niestabilności, co gwiazdy RRc, natomiast gwiazdy RRd, w których dodatkowym modem jest ten o stopniu 9, osiągają najwyższe jasności z modelowanych gwiazd. Na diagramie HR widać wyraźnie zależność rosnącej jasności wraz ze wzrostem temperatury efektywnej. Nachylenie zależności jest bliskie nachylenia linii stałego okresu (szare linie na Rys. 4.7). Większość gwiazd RRc ze zgrubienia centralnego Galaktyki (zielone punkty) ma okresy pierwszego owertonu o wartościach bliskich 0.31 dnia. Gwiazdy RRc z misji K2 mają średnio dłuższe okresy (średnio 0.34 dnia), co odpowiada wyższym jasnościom. Większość



Rysunek 4.6: Porównanie obserwowanych i teoretycznych okresów i stosunków okresów dla gwiazd RRd z grupy  $RR_{0.61}$ . Dla każdej z gwiazd przedstawione są dwa symbole połączone czarną linią. Pełne symbole odpowiadają wartościom obserwowanym, natomiast puste odpowiadają wartościom teoretycznym wynikającym z modelu o najlepszym dopasowaniu. Przerywana linia oznacza przypadki, w których dopasowanie nie jest satysfakcjonujące.

gwiazd RRd z modem o  $\ell = 9$  ma także długie okresy pierwszego owertonu (średnio 0.36 dnia), co jest zgodne z ich wyższymi wartościami jasności przy danej temperaturze efektywnej.

Na Rys. 4.8 przedstawiono zależność metaliczności od masy wymodelowanych gwiazd RRc i RRd. Większość gwiazd ma metaliczności o wartościach około  $-1.0$ , pojedyncze gwiazdy RRc mają niskie wartości metaliczności, poniżej  $-2.0$ . Nie jest widoczna wyraźna zależność metaliczności od masy gwiazd. Większość badanych gwiazd ma masy od  $0.55 M_{\odot}$  do  $0.8 M_{\odot}$ , co jest spodziewanym przedziałem mas dla gwiazd RR Lutni (np. Aerts i in. 2010). Wyższe masy, przekraczające wartości  $0.8 M_{\odot}$ , charakteryzują część gwiazd RRc z misji K2. Wyższe masy otrzymano także dla większości gwiazd RRd z modem o stopniu 9. Obserwowane wyższe wartości mas dla gwiazd z misji K2, a także jeszcze wyższe wartości dla gwiazd RRd z modem o stopniu 9, są skorelowane z wyznaczonymi dla nich wyższymi wartościami jasności na diagramie HR. Interesujący jest fakt, że gwiazdy RRd z dodatkowym modem nieradialnym o stopniu 8, nie odbiegają swoim położeniem na diagramie HR oraz na diagramie masa – metaliczność od



Rysunek 4.7: Diagram HR przedstawiający dobrze dopasowane modele dla gwiazd RRc i RRd. Dodatkowo pokazano granice klasycznego pasa niestabilności dla dwóch metaliczności na podstawie pracy [Marconi i in. \(2015\)](#). Za pomocą szarych linii przedstawiono linie stałego okresu dla dwóch wartości okresu pierwszego owertonu oraz dla metaliczności  $[\text{Fe}/\text{H}]=-1.0$ .

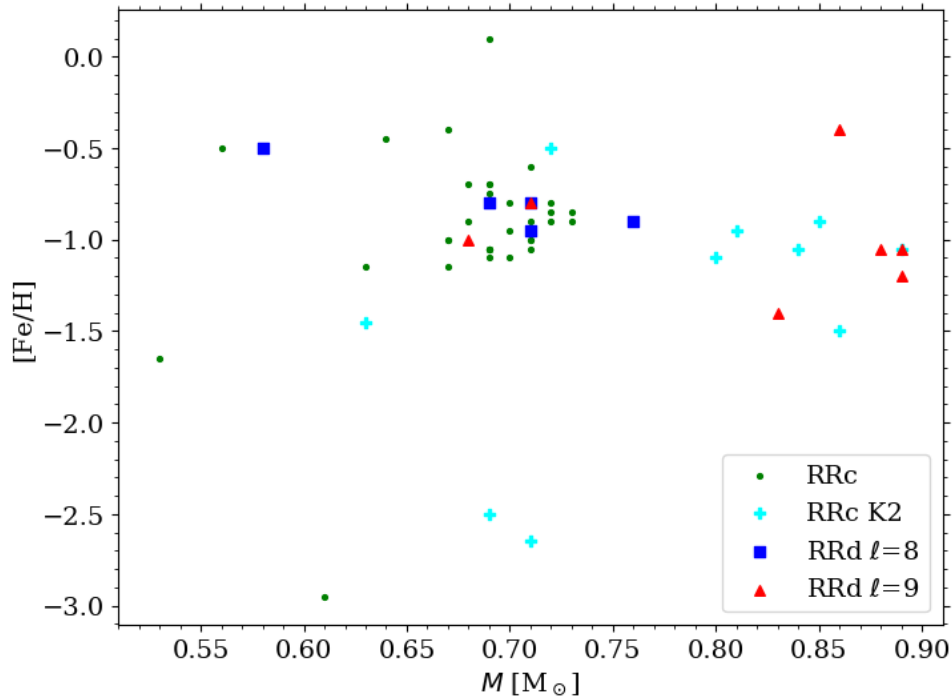
gwiazd RRc z modami nieradialnymi.

Na Rys. 4.9 przedstawiono zależność obserwowanego okresu pierwszego owertonu od wartości mas otrzymanych w modelowaniu dla gwiazd  $\text{RR}_{0.61}$ . Wyraźnie widać korelację wyższych wartości mas dla dłuższych wartości okresów, co było spodziewane i jest zgodne z położeniem gwiazd na diagramie HR (przy danej temperaturze efektywnej wyższe jasności odpowiadają gwiazdom o dłuższych okresach pulsacji). Ponownie widać, że wyróżnia się część gwiazd RRc z misji K2 oraz większość gwiazd RRd z modem nieradialnym o stopniu 9. Mają one wysokie wartości mas oraz długie okresy pulsacji. Co więcej, jak widać na Rys. 4.3, mają one typowo wyższe stosunki okresów harmonik modów nieradialnych z okresem pierwszego owertonu.

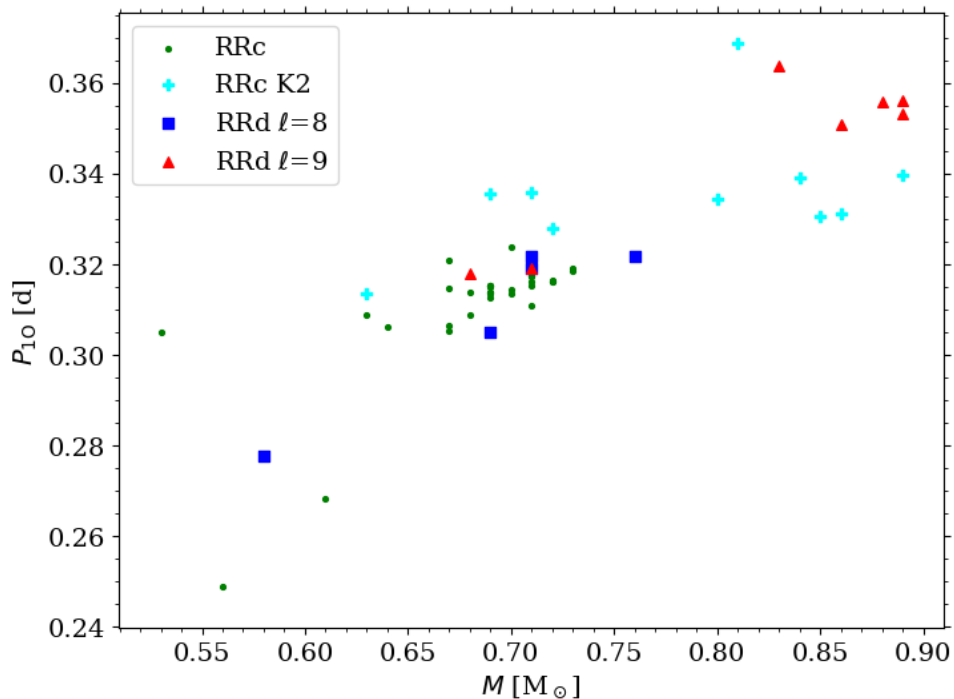
## 4.5 Dyskusja

### 4.5.1 Dopasowanie gwiazd $\text{RR}_{0.61}$

Przed rozpoczęciem modelowania, porównano położenie gwiazd  $\text{RR}_{0.61}$  z siatką modeli na diagramie Petersena (Rys. 4.3). Cztery gwiazdy, OGLE-BLG-RRLYR-11981, EPIC 60018653, EPIC 60018662 oraz V87 z gromady M3, znajdują się pomiędzy ciągami wyznaczonym przez modele, w związku z czym, ich modelowanie nie było możliwe. Zgodnie z modelem z pracy [Dziembowski \(2016\)](#), środkowy ciąg na diagramie Petersena odpowiada kombinacji liniowej częstości modów nieradialnych  $f_8 + f_9$ . Na podstawie stosunków okresów gwiazdy były sklasyfikowane początkowo jako należące do dolnego ciągu, jednak istnieje możliwość, że powin-



Rysunek 4.8: Zależność metaliczności od masy wymodelowanych gwiazd  $RR_{0.61}$ . Gwiazdy RRc ze zgrubienia centralnego Galaktyki i z gromady NGC 6362 są zaznaczone za pomocą zielonych punktów. Gwiazdy RRc z misji K2 są zaznaczone za pomocą jasnoniebieskich plusów. Gwiazdy RRd z modem nieradialnym o stopniu 8 są zaznaczone za pomocą niebieskich kwadratów, a z modem o stopniu 9 – za pomocą czerwonych trójkątów.



Rysunek 4.9: Zależność obserwowanego okresu pierwszego owertonu od wartości masy otrzymanej w modelowaniu dla gwiazd  $RR_{0.61}$ . Wykorzystanie symboli jak na Rys. 4.8.

Tabela 4.4: Wyniki dopasowania modeli dla gwiazd RRc. Kolejne kolumny zawierają nazwę gwiazdy, parametry fizyczne otrzymane na podstawie modelu (masa, metaliczność, temperatura efektywna, jasność), parametr określający jakość dopasowania oraz modelowane wartości okresów i stosunków okresów (górny wiersz) i wartości obserwowane (dolny wiersz). Nazwy gwiazd pochodzących z katalogu katalogu OGLE mają pominiętą część nazwy (OGLE-BLG-).

Nazwa	$M [M_{\odot}]$	[Fe/H]	$\log T_{\text{eff}}$	$\log \frac{L}{L_{\odot}}$	$D^2$	$P_{\text{IO}} [\text{d}]$	$R_8$	$R_9$
EPIC 210438688	0.72	-0.50	3.825	1.61	$1.7 \cdot 10^{-7}$	0.3281	0.6313	0.6120
						0.3280	0.6311	0.6121
EPIC 211701322	0.84	-1.05	3.805	1.60	$2.6 \cdot 10^{-8}$	0.3392	0.6317	0.6140
						0.3391	0.6317	0.6140
EPIC 211728918	0.89	-1.05	3.810	1.64	$1.2 \cdot 10^{-7}$	0.3395	0.6321	0.6146
						0.3395	0.6321	0.6148
EPIC 212316775	0.85	-0.90	3.815	1.63	$6.3 \cdot 10^{-8}$	0.3304	0.6324	0.6143
						0.3305	0.6323	0.6142
EPIC 212347262	0.80	-1.10	3.835	1.70	$1.1 \cdot 10^{-7}$	0.3342	0.6320	0.6141
						0.3342	0.6320	0.6143
EPIC 212352472	0.71	-2.65	3.835	1.67	$2.2 \cdot 10^{-7}$	0.3359	0.6317	0.6156
						0.3359	0.6320	0.6156
EPIC 212419731	0.69	-2.50	3.835	1.66	$2.8 \cdot 10^{-8}$	0.3356	0.6318	0.6153
						0.3356	0.6318	0.6152
EPIC 212448152	0.86	-1.50	3.830	1.70	$2.7 \cdot 10^{-8}$	0.3311	0.6316	0.6150
						0.3310	0.6317	0.6150
EPIC 212613425	0.81	-0.95	3.785	1.55	$5.8 \cdot 10^{-8}$	0.3686	0.6310	0.6128
						0.3687	0.6310	0.6128
EPIC 212824246	0.63	-1.45	3.840	1.61	$1.2 \cdot 10^{-7}$	0.3134	0.6308	0.6133
						0.3134	0.6309	0.6132
RRLYR-06352	0.71	-0.90	3.835	1.63	$9.5 \cdot 10^{-8}$	0.3163	0.6314	0.6131
						0.3163	0.6312	0.6132
RRLYR-06802	0.71	-0.60	3.825	1.59	$1.3 \cdot 10^{-7}$	0.3183	0.6315	0.6125
						0.3183	0.6314	0.6126
RRLYR-06922	0.68	-0.90	3.815	1.52	$7.5 \cdot 10^{-8}$	0.3087	0.6307	0.6124
						0.3088	0.6308	0.6126
RRLYR-07047	0.53	-1.65	3.845	1.56	$1.1 \cdot 10^{-7}$	0.3050	0.6301	0.6125
						0.3050	0.6302	0.6123
RRLYR-07803	0.68	-0.70	3.835	1.61	$6.4 \cdot 10^{-8}$	0.3138	0.6312	0.6123
						0.3139	0.6311	0.6123
RRLYR-07806	0.73	-0.85	3.810	1.54	$8.5 \cdot 10^{-8}$	0.3189	0.6313	0.6130
						0.3190	0.6312	0.6131
RRLYR-08002	0.63	-1.15	3.840	1.60	$2.4 \cdot 10^{-8}$	0.3087	0.6306	0.6126
						0.3088	0.6306	0.6126
RRLYR-08475	0.71	-1.00	3.825	1.58	$1.3 \cdot 10^{-7}$	0.3109	0.6313	0.6132
						0.3109	0.6311	0.6132
RRLYR-08799	0.71	-0.95	3.820	1.57	$1.0 \cdot 10^{-7}$	0.3174	0.6309	0.6128
						0.3173	0.6311	0.6130
RRLYR-08826	0.69	-0.70	3.815	1.53	$7.4 \cdot 10^{-8}$	0.3125	0.6309	0.6122
						0.3125	0.6309	0.6120
RRLYR-08920	0.69	-1.05	3.840	1.64	$1.4 \cdot 10^{-8}$	0.3150	0.6311	0.6131
						0.3150	0.6311	0.6132

Nazwa	$M [M_{\odot}]$	[Fe/H]	$\log T_{\text{eff}}$	$\log \frac{L}{L_{\odot}}$	$D^2$	$P_{10}$ [d]	$R_8$	$R_9$
RRLYR-08980	0.69	-0.75	3.795	1.45	$7.8 \cdot 10^{-8}$	0.3136	0.6311	0.6125
						0.3136	0.6312	0.6126
RRLYR-09444	0.70	-1.10	3.840	1.66	$5.6 \cdot 10^{-8}$	0.3238	0.6312	0.6132
						0.3238	0.6312	0.6133
RRLYR-09733	0.69	-0.70	3.795	1.45	$5.9 \cdot 10^{-8}$	0.3138	0.6312	0.6124
						0.3138	0.6313	0.6124
RRLYR-10119	0.69	-1.05	3.835	1.62	$2.8 \cdot 10^{-8}$	0.3154	0.6311	0.6131
						0.3154	0.6311	0.6130
RRLYR-10262	0.72	-0.90	3.800	1.49	$7.8 \cdot 10^{-8}$	0.3162	0.6313	0.6131
						0.3162	0.6311	0.6131
RRLYR-10534	0.71	-1.05	3.840	1.65	$1.7 \cdot 10^{-7}$	0.3154	0.6314	0.6135
						0.3153	0.6315	0.6132
RRLYR-10614	0.70	-0.80	3.825	1.58	$9.3 \cdot 10^{-8}$	0.3144	0.6311	0.6126
						0.3145	0.6311	0.6127
RRLYR-11072	0.72	-0.85	3.805	1.51	$8.9 \cdot 10^{-8}$	0.3161	0.6313	0.6130
						0.3160	0.6312	0.6131
RRLYR-11547	0.64	-0.45	3.795	1.41	$1.1 \cdot 10^{-7}$	0.3061	0.6306	0.6113
						0.3062	0.6307	0.6115
RRLYR-11621	0.71	-1.00	3.820	1.57	$5.3 \cdot 10^{-8}$	0.3172	0.6311	0.6130
						0.3172	0.6311	0.6131
RRLYR-11728	0.69	-1.10	3.835	1.62	$4.1 \cdot 10^{-8}$	0.3151	0.6313	0.6133
						0.3152	0.6312	0.6133
RRLYR-11913	0.73	-0.90	3.815	1.56	$5.4 \cdot 10^{-8}$	0.3184	0.6313	0.6130
						0.3184	0.6312	0.6130
RRLYR-12261	0.69	-1.05	3.820	1.54	$6.1 \cdot 10^{-8}$	0.3051	0.6311	0.6132
						0.3051	0.6310	0.6131
RRLYR-12769	0.70	-0.95	3.830	1.60	$4.5 \cdot 10^{-8}$	0.3134	0.6313	0.6131
						0.3134	0.6313	0.6132
RRLYR-12776	0.69	-1.05	3.835	1.62	$4.6 \cdot 10^{-8}$	0.3154	0.6311	0.6131
						0.3154	0.6310	0.6132
RRLYR-12972	0.67	-1.00	3.840	1.64	$7.2 \cdot 10^{-8}$	0.3209	0.6307	0.6125
						0.3209	0.6308	0.6125
RRLYR-13156	0.72	-0.80	3.805	1.51	$3.9 \cdot 10^{-8}$	0.3163	0.6313	0.6128
						0.3163	0.6313	0.6129
RRLYR-31736	0.67	-1.15	3.810	1.49	$6.6 \cdot 10^{-8}$	0.3052	0.6309	0.6131
						0.3052	0.6309	0.6130
RRLYR-32213	0.56	-0.50	3.835	1.42	$1.9 \cdot 10^{-7}$	0.2489	0.6321	0.6129
						0.2489	0.6323	0.6127
V17	0.67	-0.40	3.800	1.46	$8.2 \cdot 10^{-8}$	0.3146	0.6310	0.6115
						0.3146	0.6309	0.6117
V33	0.67	-1.00	3.800	1.45	$6.0 \cdot 10^{-8}$	0.3064	0.6309	0.6128
						0.3064	0.6309	0.6130



Tabela 4.5: Wyniki dopasowania modeli dla gwiazd RRd. Kolejne kolumny zawierają nazwę gwiazdy, parametry fizyczne otrzymane na podstawie modelu (masa, metaliczność, temperatura efektywna, jasność), parametr określający jakość dopasowania oraz modelowe wartości okresów i stosunków okresów (górnny wiersz) i wartości obserwowane (dolny wiersz). Pierwsza część tabeli odpowiada gwiazdom RRd, z dodatkowym modelem nieradialnym o stopniu  $\ell = 8$ , a druga część tabeli odpowiada gwiazdom RRd, z dodatkowym modelem nieradialnym o stopniu  $\ell = 9$ . Nazwy gwiazd pochodzących z katalogu OGLE mają pominiętą część nazwy (OGLE-BLG-).

Nazwa	$M [M_{\odot}]$	[Fe/H]	$\log T_{\text{eff}}$	$\log \frac{L}{L_{\odot}}$	$D^2$	$P_F$ [d]	$P_{10}$ [d]	$R_8$
RRLYR-09258	0.58	-0.50	3.830	1.47	$8.4 \cdot 10^{-7}$	0.37923	0.27791	0.63069
						0.37933	0.27767	0.63079
RRLYR-10369	0.71	-0.95	3.840	1.66	$5.3 \cdot 10^{-7}$	0.43511	0.32166	0.63150
						0.43487	0.32171	0.63179
RRLYR-10796	0.71	-0.80	3.805	1.51	$1.1 \cdot 10^{-7}$	0.43142	0.31901	0.63096
						0.43138	0.31910	0.63087
RRLYR-13198	0.76	-0.90	3.825	1.62	$9.6 \cdot 10^{-8}$	0.43451	0.32166	0.63162
						0.43444	0.32174	0.63158
RRLYR-13666	0.69	-0.80	3.835	1.60	$2.4 \cdot 10^{-7}$	0.41333	0.30486	0.63171
						0.41344	0.30496	0.63155
Nazwa	$M [M_{\odot}]$	[Fe/H]	$\log T_{\text{eff}}$	$\log \frac{L}{L_{\odot}}$	$D^2$	$P_F$ [d]	$P_{10}$ [d]	$R_9$
RRLYR-10744	0.88	-1.05	3.795	1.60	$1.9 \cdot 10^{-7}$	0.47830	0.35580	0.61406
						0.47811	0.35576	0.61417
RRLYR-10796	0.71	-0.80	3.805	1.51	$9.8 \cdot 10^{-8}$	0.43142	0.31901	0.61246
						0.43138	0.31910	0.61243
RRLYR-11234	0.89	-1.05	3.800	1.62	$1.5 \cdot 10^{-7}$	0.47446	0.35302	0.61424
						0.47438	0.35300	0.61403
RRLYR-14029	0.68	-1.00	3.840	1.64	$1.3 \cdot 10^{-7}$	0.42983	0.31805	0.61283
						0.42995	0.31799	0.61275
CoRoT 0101368812	0.83	-1.40	3.840	1.78	$3.1 \cdot 10^{-8}$	0.48809	0.36358	0.61417
						0.48804	0.36360	0.61409
V13	0.86	-0.40	3.790	1.56	$4.4 \cdot 10^{-7}$	0.47940	0.35059	0.61401
						0.47950	0.35072	0.61370
V68	0.89	-1.20	3.840	1.79	$1.1 \cdot 10^{-7}$	0.47852	0.35588	0.61463
						0.47850	0.35597	0.61450

ny zostać sklasyfikowane jako przynależne do ciągu środkowego. Oznaczałoby to, że w tych czterech gwiazdach wykryto sygnały odpowiadające częstości kombinacyjnej, a nie harmonice modu nieradialnego. Odpowiadałoby to sytuacji dyskutowanej w rozdziale 2.2.3 dla OGLE-BLG-RRLYR-7806. W sezonie obserwacyjnym w 2012 roku wykryto jedynie sygnał odpowiadający częstości kombinacyjnej (patrz Rys. 2.19). Istnieje też możliwość, że dodatkowe sygnały odpowiadają harmonikom modów nieradialnych, ale parametry fizyczne gwiazd są nietypowe i nie zostały uwzględnione w siatce modeli. Nie można także wykluczyć, że dodatkowe sygnały obserwowane w widmie częstości są wynikiem kontaminacji lub fluktuacji szumu.

Do dalszego modelowania wybrano 45 gwiazd RRc oraz 14 gwiazd RRd, których położenia na diagramie Petersena zgadzają się z ogólnym przewidywaniem modeli pulsacyjnych (Rys. 4.3).

Satysfakcjonujące dopasowanie udało się znaleźć dla 42 gwiazd RRc oraz 11 gwiazd RRd. Trzy gwiazdy RRc, dla których nie znaleziono odpowiednio dobrego dopasowania (czyli o wartości  $D^2$  niższej niż  $5 \cdot 10^{-7}$ ) to gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-05202, OGLE-BLG-RRLYR-07665 i EPIC 212684145. W gwiazdach OGLE-BLG-RRLYR-05202 oraz OGLE-BLG-RRLYR-07665 jeden z obserwowanych stosunków okresów jest nietypowy. W przypadku gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-05202 obserwowany jest znacznie wyższy stosunek okresów jaki tworzy harmonika modu  $\ell = 8$  z okresem pierwszego owertonu (obserwowany stosunek okresów to 0.6356, typowa wartość dla  $RR_{0.61} - 0.631$ ), podczas gdy drugi stosunek okresów, odpowiadający  $\ell = 9$  jest typowy (obserwowany stosunek okresów to 0.6127, typowa wartość dla  $RR_{0.61} - 0.613$ ). W gwiazdzie OGLE-BLG-RRLYR-07665 sytuacja jest odwrotna, czyli nietypowy (wyższy) stosunek okresów odpowiada harmonice modu o  $\ell = 9$ . Obie gwiazdy w wyraźny sposób odstają od pozostałych modelowanych gwiazd. Brak dopasowania może być więc spowodowany tym, że klasyfikacja tych gwiazd jako trójmodalnych jest błędna i w rzeczywistości jeden z dodatkowych sygnałów nie odpowiada harmonice modu nieradialnego (może wynikać z kontaminacji lub fluktuacji szumu). Gwiazda EPIC 212684145 ma wartości stosunku okresów typowe dla próbki gwiazd  $RR_{0.61}$  z misji K2. Najlepsze dopasowanie dla niej odpowiada wartości parametru  $D^2 = 7.6 \cdot 10^{-7}$ , która nie jest dużo wyższa od przyjętej granicznej wartości dla  $D^2$ . W przypadku tej gwiazdy, możliwe, że zagęszczenie siatki modeli lub modelowanie indywidualne, spowodowałoby znalezienie satysfakcjonującego modelu. W szczególności zagęszczenie siatki w temperaturze efektywnej może znacznie zwiększyć dokładność dopasowania modeli do obserwowanych gwiazd. W wykorzystanej siatce modeli krok w temperaturze efektywnej wynosi od około 65 K przy czerwonej granicy pasa niestabilności, do około 95 K przy niebieskiej granicy.

Kolejne 3 gwiazdy, dla których nie udało się znaleźć satysfakcjonującego dopasowania to gwiazdy RRd. Jedną z nich jest AQ Leo, której stosunek okresów także jest nietypowy. Na podstawie wartości stosunku okresów, gwiazda ta przynależy do środkowego ciągu. Jednak jej położenie na diagramie Petersena spowodowało, że była modelowana jako gwiazda z harmoniką modu o stopniu 8. Brak dobrego dopasowania może być więc spowodowany błędną klasyfikacją gwiazdy, lub niestandardowymi parametrami fizycznymi jakie musiałby mieć model, aby był w stanie odtworzyć obserwowane okresy i stosunki okresów. Dwie gwiazdy, OGLE-BLG-RRLYR-13721 i OGLE-BLG-RRLYR-14031, dla których najlepsze dopasowanie nie było wystarczająco dokładne, mają nietypowe stosunki okresów (znacznie niższe lub wyższe niż dla pozostałych gwiazd). Dodatkowo gwiazdy OGLE-BLG-RRLYR-14031 i AQ Leo mają dłuższe okresy pulsacji. Gwiazdy RRd o tak długich okresach stanowią wyzwanie w kontekście modelowania, ponieważ wymagają nietypowych parametrów fizycznych (wysokie masy i niskie metaliczności; patrz np. [Smolec i in. 2016b](#)). Ze wstępnie wyselekcjonowanej próbki, nie udało się dopasować modelu dla łącznie pięciu gwiazd RRd, w których okres pierwszego owertonu jest dłuższy niż 0.4 dnia.

Podsumowując, gwiazdy bez dobrego dopasowania (o  $D^2$  rzędu  $10^{-7}$  bądź wyższym), to gwiazdy o wyraźnie nietypowych stosunkach okresów. Możliwe, że sygnały które rzeczywiście odpowiadają harmonikom modów nieradialnych tworzą znacznie węższe ciągi na diagramie Petersena, a gwiazdy odstające od ciągów mogą mieć niepoprawnie określone częstotliwości dodatkowych sygnałów. Możliwe także, że nietypowe stosunki okresów wymagają nietypowych parametrów fizycznych, które nie zostały uwzględnione w siatce modeli lub krok siatki modeli jest zbyt duży.

W widmie częstości, mody nieradialne o  $\ell = 8, 9$  oraz ich harmoniki są sygnałami niestacjonarnymi (patrz rozdział 2). Zmienność częstości i amplitudy ma różne skale czasowe w zależności od gwiazdy. Jednym ze źródeł tej zmienności w modelu z pracy [Dziembowski \(2016\)](#) jest wzajemne oddziaływanie pomiędzy  $2\ell + 1$  składowymi multipletów. Jeżeli analizowano długie

szeregi czasowe, zmienność objawia się szerokimi nadwyżkami mocy w widmie częstości, które są wycentrowane dla częstości modu o  $m = 0$ . Częstości wyznaczone w rachunkach pulsacyjnych również odpowiadają modom o  $m = 0$  (brak rotacji, brak sprzężeń między składnikami multipletu). Wobec tego dopasowanie funkcji Gaussa do odpowiednich sygnałów, jak dla gwiazd RRc ze zgrubienia centralnego Galaktyki (Rys. 4.4), umożliwia najlepsze określenie reprezentatywnej częstości modów nieradialnych. W przypadku analizy krótszych szeregów czasowych, w widmie częstości nie obserwuje się szerokich struktur i nie ma dobrego sposobu na określenie centralnej wartości częstości. Jak pokazano na Rys. 2.19, analiza krótszych segmentów danych może prowadzić do wartości częstości znacząco odbiegającej od wartości *uśrednionej*, wynikającej z analizy dłuższego segmentu. W badanej próbie ten problem jest szczególnie zauważalny dla gwiazd RRc obserwowanych w ramach misji K2. Gwiazdy z gromady M3 też były obserwowane jedynie kilka miesięcy.

#### 4.5.2 Porównanie wyznaczonych parametrów fizycznych z innymi przewidywaniami teoretycznymi

W ogólności, modelowanie ewolucji gwiazd RR Lutni jest zagadnieniem nietrywialnym ze względu na niepewności związane z modelowaniem poszczególnych etapów ewolucji, jak np. ewolucji na gałęzi czerwonych olbrzymów, podczas której następuje utrata masy, czy błysk helowy podczas rozpoczęcia reakcji spalania helu w zdegenerowanym jądrze gwiazdy. W modelowaniu przedstawionym w tym rozdziale wykorzystano jedynie otoczkowy kod pulsacyjny. Oznacza to, że na etapie modelowania, parametry wejściowe modeli nie są ograniczone przez teorię ewolucji. Parametry fizyczne badanych gwiazd RR<sub>0.61</sub> są wyznaczone jedynie na podstawie teorii pulsacji. Interesujące jest więc skonfrontowanie wyznaczonych parametrów fizycznych z przewidywaniami teorii ewolucji. W przypadku Cefeid klasycznych takie porównanie prowadzi do tzw. problemu niezgodności mas (ang. *Cepheid mass discrepancy problem*). Masy przewidziane przez teorię ewolucji są wyższe o około 10 – 20% niż te przewidziane w wyniku modelowania pulsacji (Cox 1980; Keller 2008). Porównanie wyników modelowania pulsacji dla gwiazd RR Lutni z rozprawy z przewidywaniami teorii ewolucji jest przedstawione na diagramie HR na Rys. 4.10. Gwiazdy RR<sub>0.61</sub> z wyznaczonymi parametrami fizycznymi przedstawione są razem ze ścieżkami ewolucyjnymi gwiazd gałęzi horyzontalnej. Na lewym panelu wykorzystano ścieżki ewolucyjne pochodzące z bazy danych BaSTI (Hidalgo i in. 2018). Na prawym panelu przedstawiono ścieżki ewolucyjne z bazy danych Dartmouth (Dotter i in. 2008). Kolorem zaznaczono masy modelowanych gwiazd oraz masy modeli z wykorzystanych ścieżek ewolucyjnych. Porównanie jakościowe modeli pulsacyjnych z przebiegiem ścieżek ewolucyjnych o podobnych wartościach metaliczności sugeruje, że masy gwiazd RR<sub>0.61</sub> wyznaczone za pomocą modelowania pulsacji są wyższe niż masy odpowiadające ścieżkom ewolucyjnym przebiegającym przez odpowiednią część diagramu HR. W szczególności największą niezgodność obserwuje się dla mas powyżej 0.8  $M_{\odot}$  wyznaczonych dla niektórych gwiazd RRc z danych K2 oraz dla większości gwiazd RRd z modem nieradialnym o stopniu 9. Na Rys. 4.11 pokazano ścieżki ewolucyjne na podstawie bazy danych BaSTI dla mas powyżej 0.8  $M_{\odot}$  dla dwóch metaliczności. Jedynie dla niskich metaliczności ( $[Fe/H] = -2.2$ ) modele o wysokich masach są położone wewnątrz klasycznego pasa niestabilności. Jednak w przypadku badanych gwiazd, dla których otrzymano wysokie masy, otrzymano jednocześnie wyższe wartości metaliczności (wartości około  $-1.0$ ). Badane gwiazdy, dla których otrzymano masy powyżej 0.8  $M_{\odot}$  są zatem trudne do wyjaśnienia na gruncie teorii ewolucji. Z kolei Kovacs i in. (1992) badając wpływ składu chemicznego na wartości stosunku okresów modów radialnych w gwiazdach RRd otrzymali masy powyżej 0.8  $M_{\odot}$  dla obfitości metali  $Z = 0.001$ .

Na Rys. 4.10 widać również, że ścieżki ewolucyjne dla modeli o metaliczności bliskiej typowej wartości metaliczności wyznaczonej dla modelowanych gwiazd, mają wyższe jasności. Jest to kolejna obserwowana rozbieżność pomiędzy modelami pulsacyjnymi a ewolucyjnymi.

Przyczyny otrzymania tak wysokich mas, szczególnie dla gwiazd RRd z modem nieradialnym o stopniu 9 oraz dla gwiazd RRc z misji K2, nie są oczywiste do wyjaśnienia. W przypadku gwiazd o dłuższych okresach, szczególnie gwiazd RRd z wzbudzonym modem nieradialnym o stopniu 9, pewną rolę mogą odgrywać efekty nieliniowe, prowadzące np. do przesunięcia częstości modów nieradialnych. W tym kontekście warto zauważyć, że mody nieradialne o stopniach 8 i 9 obserwujemy wyłącznie w gwiazdach, w których wzbudzony jest pierwszy owerton (RRc albo RRd). Jak dotąd nie odkryto tych modów nieradialnych w gwiazdach RRab, choć na poziomie teorii liniowej nie ma ku temu przeszkód – mod fundamentalny oraz dyskutowane mody nieradialne mogą być równocześnie liniowo niestabilne. Sugeruje to, że obecność modu fundamentalnego może mieć silny wpływ na własności modów nieradialnych. Niestety, ewentualne oddziaływania pomiędzy modami oscylacji na poziomie nieliniowym nie są możliwe obecnie do uwzględnienia.

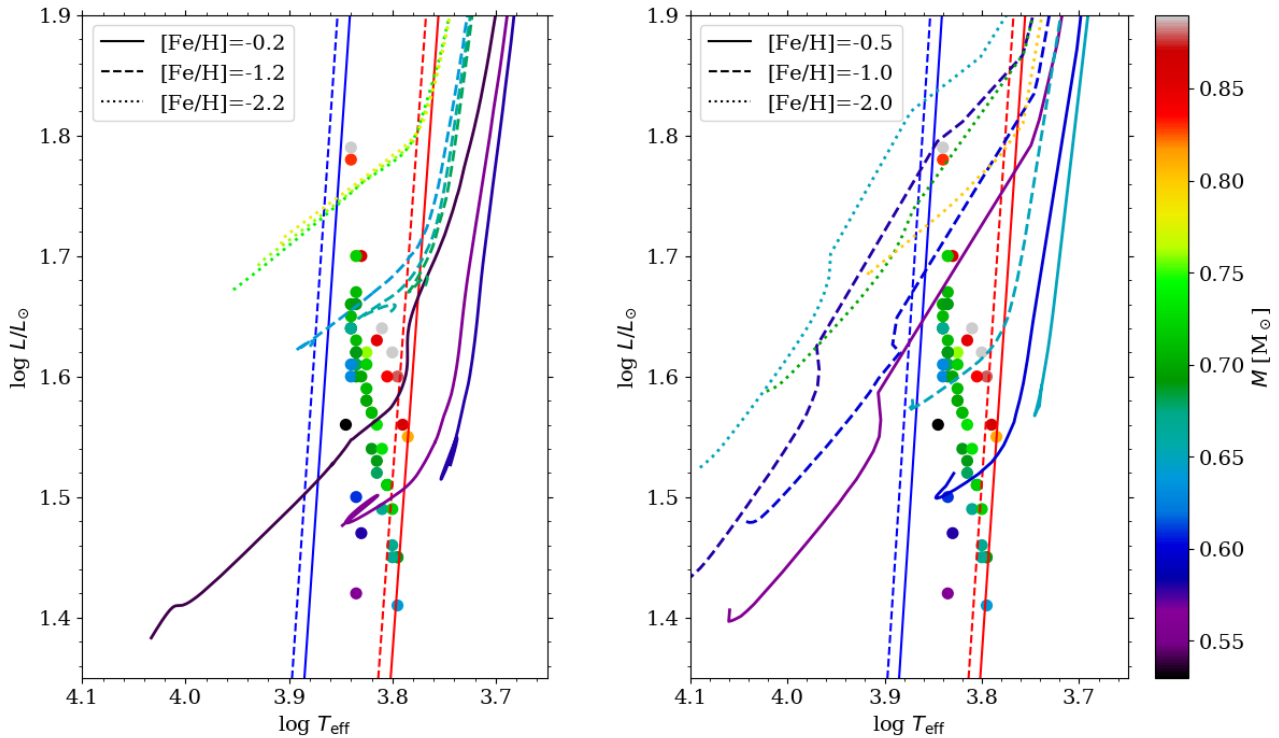
W przypadku gwiazd z misji K2 problemem może być określenie reprezentatywnej częstości dodatkowego modu ze względu na typowo silną zmienność modu i krótki czas obserwacji tych gwiazd (patrz ostatni akapit w rozdziale 4.5.1). Dłuższe obserwacje fotometryczne pozwoliłyby na sprawdzenie tego wyjaśnienia. Gwiazdy K2 wyróżniają się także spośród pozostałych gwiazd nieco większym rozrzutem na diagramie Petersena oraz mają średnio wyższe stosunki okresów  $R_8$  i  $R_9$  (patrz Rys. 4.3).

Obserwowanymi różnicami pomiędzy gwiazdami o wyznaczonych masach spodziewanych dla gwiazd RR Lutni, a gwiazdami o wysokich masach, są okresy pulsacji, które są znacznie dłuższe dla masywnych gwiazd, oraz stosunki okresów, które są średnio wyższe. Warto zauważyć, że modelowanie gwiazd RRd o długich okresach i wysokich stosunkach okresów również stanowi wyzwanie (patrz np. Smolec i in. 2016b) – niezbędne wydają się wysokie masy przy bardzo niskich metalicznościach. Dalsza analiza problemu wysokich mas uzyskanych dla niektórych obiektów wymagałaby dalszych obserwacji fotometrycznych. Przydatne byłyby również dodatkowe, niezależne ograniczenia na modele, np. precyzyjne wyznaczenia metaliczności.

Aby dokładniej zbadać problem rozbieżności mas pomiędzy wyznaczeniami pulsacyjnymi i ewolucyjnymi dla gwiazd RR Lutni, przydatne byłyby niezależne pomiary mas. Bezpośrednie oszacowanie masy jest możliwe dla gwiazd znajdujących się w zaćmieniowych układach podwójnych. Do tej pory jednak nie została potwierdzona ani jedna gwiazda RR Lutni w układzie podwójnym. Najbardziej obiecująca kandydatka na taki obiekt okazała się gwiazdą o znacznie mniejszej masie ( $0.26 M_{\odot}$ ). Gwiazda ta po utracie otoczki (w wyniku ewolucji w ciasnym układzie podwójnym), ewoluując przez klasyczny pas niestabilności, naśladuje pulsacje gwiazd RR Lutni (Pietrzyński i in. 2012). Poszukiwania gwiazd RR Lutni w układach podwójnych są prowadzone i zaowocowały już znalezieniem możliwych kandydatek na takie obiekty (patrz np. Hajdu i in. 2018, i referencje tamże). Jednak w dalszym ciągu kandydatki te nie zostały definitywnie potwierdzone, a także znane kandydatki nie są w zaćmieniowych układach podwójnych, przez co precyzyjne wartości mas nie są możliwe do otrzymania. Wobec tego, w dalszym ciągu brakuje precyzyjnego, obserwacyjnego wyznaczenia mas gwiazd RR Lutni. Istnieją jednak pośrednie oszacowania mas wynikające z przewidywań teoretycznych np. z wykorzystania przewidzianych teoretycznie relacji pomiędzy parametrami fizycznymi a parametrami krzywych blasku (patrz np. Simon i Clement 1993), porównania z teoretycznymi ścieżkami ewolucyjnymi (patrz np. Marsakov i in. 2019) lub z modelowania asterosejsmicznego (patrz np. Molnár i in. 2015).

Simon i Clement (1993) na podstawie modelowania hydrodynamicznego gwiazd RRc i dopa-





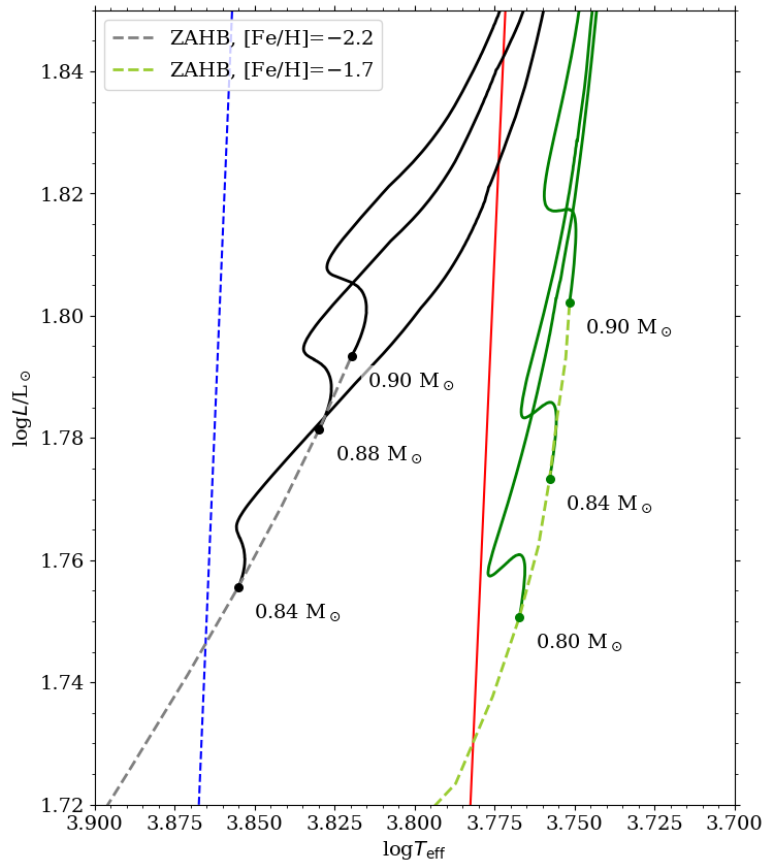
Rysunek 4.10: Porównanie położenia modeli dopasowanych do gwiazd RRc i RRd ze ścieżkami ewolucyjnymi. Masy modeli oraz masy odpowiadające ścieżkom są opisane kolorem. Lewy panel: ścieżki ewolucyjne pochodzą z bazy danych BaSTI [Hidalgo i in. \(2018\)](#). Prawy panel: ścieżki ewolucyjne pochodzą z bazy danych Dartmouth ([Dotter i in. 2008](#)).

sowania modeli krzywych blasku do obserwacji gwiazd RRc z gromad kulistych, zaproponowali relacje pomiędzy parametrami fizycznymi a parametrami opisującymi krzywe blasku (współczynniki Fouriera). Relacje te pozwalają na oszacowanie temperatury efektywnej, obfitości helu, masy oraz jasności (równania 2, 3, 4 oraz 5 w pracy [Simon i Clement 1993](#)).

Wykorzystałam relacje dla gwiazd RRc z pracy [Simon i Clement \(1993\)](#), aby porównać wyniki otrzymane na podstawie modelowania gwiazd RR<sub>0.61</sub> z wynikami otrzymanymi na podstawie kształtu krzywych blasku. Wykorzystując tę relację otrzymuje się zdecydowanie zbyt niskie masy (0.3 – 0.45  $M_{\odot}$ ) w stosunku do otrzymanych w rozprawie na podstawie modelowania. Co więcej, masy te są w sprzeczności z współcześnie przyjmowanym zakresem mas dla gwiazd RR Lutni wynikającym z teorii ewolucji gwiazd (0.6 – 0.8  $M_{\odot}$ , np. [Aerts i in. 2010](#)). Obecnie w dalszym ciągu podejmowane są podobne próby powiązania kształtu krzywych blasku z parametrami fizycznymi z wykorzystaniem nieliniowych kodów pulsacyjnych (dla gwiazd RRab patrz np. [Bellinger i in. 2020](#)).

W pracy [Marsakov i in. \(2019\)](#) przedstawiono oszacowania mas dla gwiazd RRc z gromad kulistych, które otrzymano na podstawie porównania z teoretycznymi ścieżkami ewolucyjnymi. Otrzymano w ten sposób masy dla prawie 100 gwiazd RR Lutni. Masy te są jednak znacznie niższe niż wartości otrzymane w niniejszej analizie. Średnia masa próbki badanej przez [Marsakov i in. \(2019\)](#) wynosi bowiem 0.55  $M_{\odot}$ , natomiast średnia masa dla próbki badanej w rozprawie wynosi 0.71  $M_{\odot}$ . Jest to zgodne z pokazaną na Rys. 4.10 zaobserwowaną niezgodnością mas między wynikami z modelowania pulsacji a przewidywaniami rachunków ewolucyjnych.

Oszacowanie mas gwiazd RR Lutni jest także dostępne w katalogu TIC (*TESS Input Catalog*), jednak znajdujemy tam wartości nawet powyżej 1  $M_{\odot}$ , co jest sprzeczne z wszystkimi

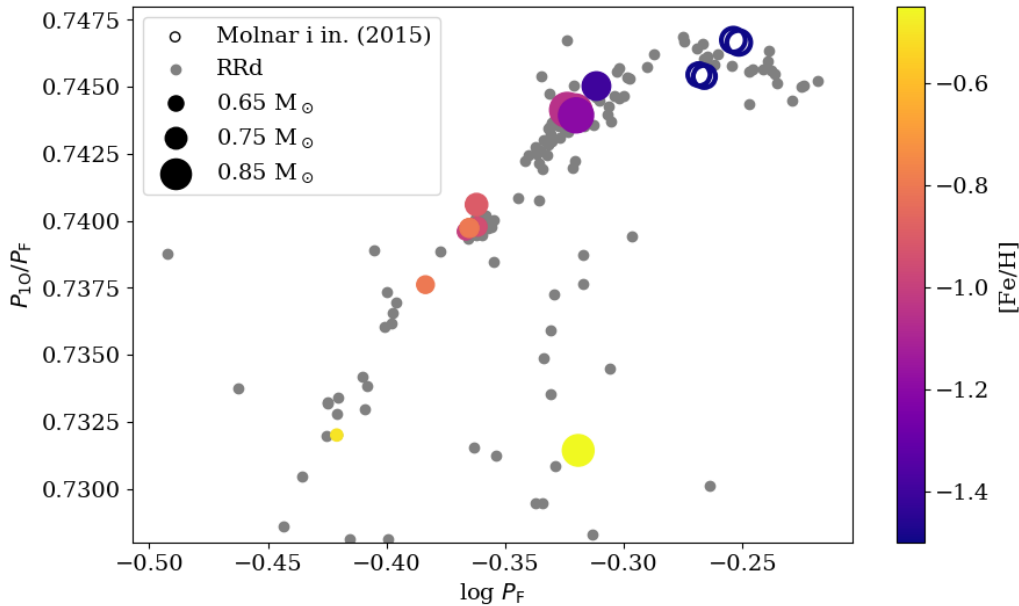


Rysunek 4.11: Diagram HR z przedstawionymi ścieżkami ewolucyjnymi masywnych gwiazd z bazy danych BaSTI (Hidalgo i in. 2018). Czerwona i niebieska linia odpowiadają pozycjom czerwonej i niebieskiej granicy klasycznego pasa niestabilności z pracy Marconi i in. (2015).

innymi przewidywaniami i szacunkami.

Dla pojedynczych obiektów, w literaturze znajdują się oszacowania mas na podstawie modelowania. W pracy Molnár i in. (2015) przeprowadzono nieliniowe modelowanie hydrodynamiczne dwóch gwiazd RRd otrzymując masy 0.76 i 0.78  $M_{\odot}$ . Diagram Petersena dla stosunku okresów modów radialnych w gwiazdach RRd jest pokazany na Rys. 4.12. Zaznaczono masę gwiazdy wielkością punktu, a jej metaliczność kolorem. Pustymi kółkami zaznaczono modele dla dwóch gwiazd RRd z pracy Molnár i in. (2015) – dla każdej gwiazdy wyznaczono po dwa modele. Szare symbole odpowiadają gwiazdom RRd obserwowanym przez projekt OGLE w kierunku zgrubienia centralnego Galaktyki, a także anomalnym gwiazdom RR Lutni o nietypowych stosunkach okresów (Soszyński i in. 2019b). Obserwowany jest wzrost wartości stosunku okresów wraz ze wzrostem masy, a także spadek wartości stosunku okresów wraz ze wzrostem metaliczności. Obie te relacje są spodziewane dla gwiazd RRd na podstawie modeli (patrz np. Kovacs i in. 1992 i rys. 12 w pracy Smolec i in. 2016a). Gwiazda o nietypowym stosunku okresów (anomalna gwiazda RRd) to V13 z gromady M3. Porównanie położenia gwiazd RRd z tej analizy do modeli dla dwóch gwiazd RRd z pracy Molnár i in. (2015) jest zaprezentowane na Rys. 4.13 w formie diagramu HR. Wartości jasności oraz temperatur efektywnych są podobne do otrzymanych w niniejszym rozdziale dla gwiazd RRd.





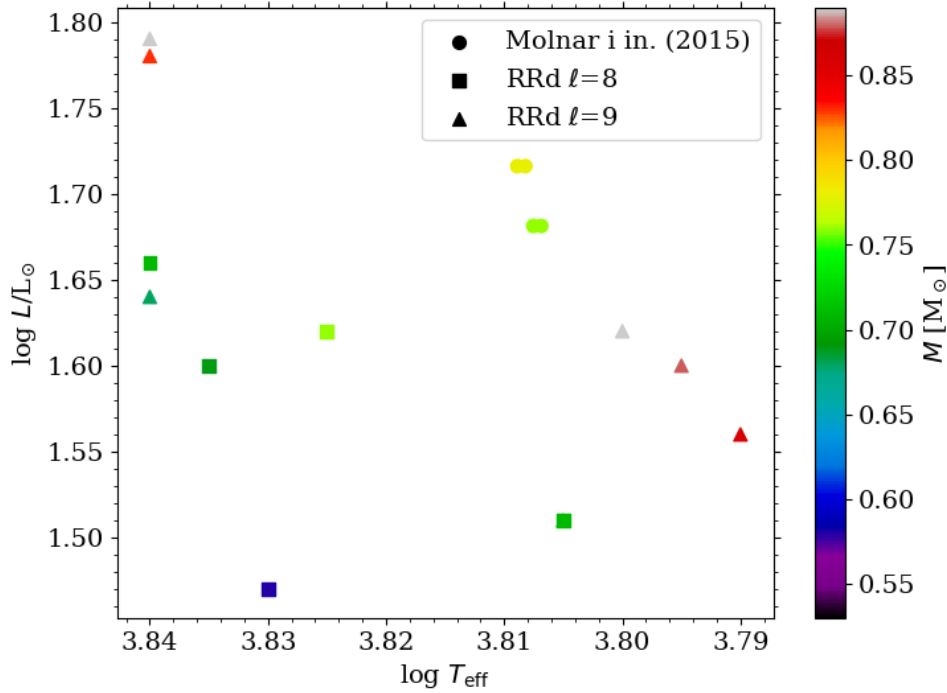
Rysunek 4.12: Diagram Petersena dla badanych gwiazd RRd. Gwiazdy zostały przedstawione za pomocą kolorowych kółek, a kolor odpowiada wyznaczonej metaliczności. Rozmiar punktów odpowiada masie. Pustymi kółkami zaznaczono modele dla dwóch gwiazd z pracy [Molnár i in. \(2015\)](#) – dla każdej gwiazdy zaproponowano po dwa modele. Szare punkty odpowiadają gwiazdom RRd obserwowanym w projekcie OGLE w kierunku zgrubienia centralnego Galaktyki, w tym pokazano także anomalne gwiazdy RR Lutni (w ich przypadku rozmiar punktu nie odpowiada masie).

### 4.5.3 Porównanie z obserwowanymi wartościami

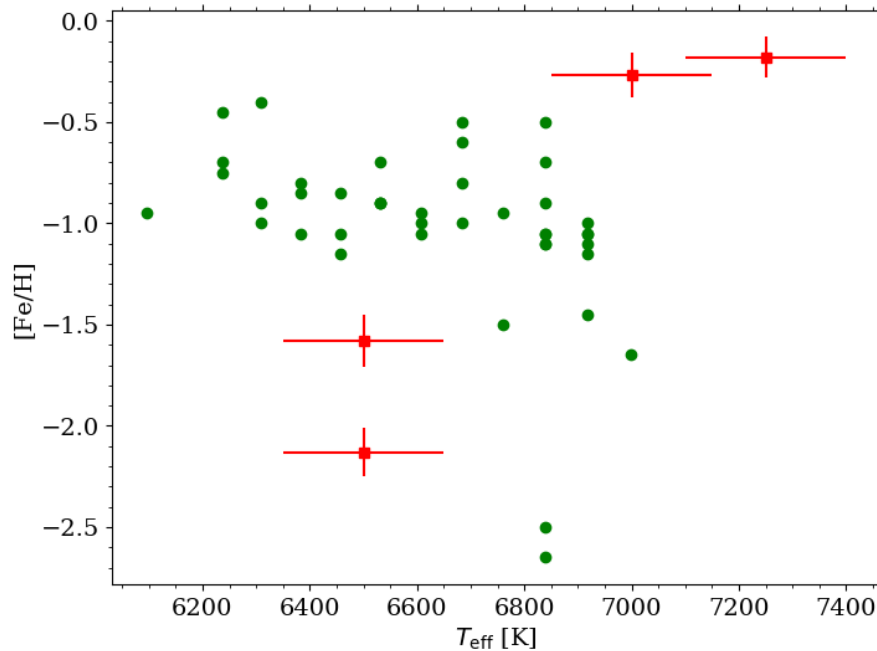
Dla gwiazd RR Lutni istnieją wyznaczenia temperatur efektywnych oraz metaliczności na podstawie obserwacji spektroskopowych. W pracy [Nemec i in. \(2013\)](#) wyznaczono metaliczności oraz temperatury dla czterech gwiazd RRc z oryginalnego pola *Keplera*. We wszystkich czterech gwiazdach znaleziono także sygnały RR<sub>0.61</sub> ([Moskalik i in. 2015](#)). W każdej gwiazdzie znaleziono jednak pojedynczy dodatkowy sygnał, w związku z czym nie zostały one wykorzystane przeze mnie w badaniach. Porównanie wyznaczonych metaliczności oraz temperatur efektywnych dla gwiazd RRc z oryginalnego pola *Keplera* i gwiazd z wyznaczonymi parametrami w przedstawionej analizie jest zaprezentowane na Rys. 4.14. Jedna z gwiazd RRc z pola *Keplera* ma wyższą temperaturę efektywną niż 7000 K, natomiast pozostałe 3 gwiazdy mają wartości z przedziału otrzymanego w moim modelowaniu. Dwie gwiazdy z pola *Keplera* mają także wysoką metaliczność ( $[Fe/H]$  wynosi  $-0.27$  oraz  $-0.18$ ), podczas, gdy najwyższa otrzymana w modelowaniu wartość  $[Fe/H]$  w badanej próbce wynosi  $-0.25$ .

Na Rys. 4.15 pokazany jest rozkład metaliczności dla gwiazd RRc z badanej próbki, a także dla niemal 300 gwiazd RRc z otoczenia Słońca ze spektroskopowymi wyznaczeniami metaliczności ([Kollmeier i in. 2013](#)). Gwiazdy RRc z badanej próbki osiągają maksimum dla tych samych wyznaczeń metaliczności co gwiazdy z oszacowaniem na podstawie spektroskopii. Kształt rozkładu jest również bardzo podobny.

W rozdziale 2 została przedyskutowana częstość występowania dodatkowych sygnałów odpowiadających grupie RR<sub>0.61</sub> w obserwacjach gwiazd RR Lutni. Im lepszej jakości dane fotometryczne, tym wyższa częstość występowania (patrz Tab. 2.1). Obserwacje gwiazd RR Lutni w gromadach M3 i NGC 6362 sugerują, że dodatkowych sygnałów nie obserwuje się w gorącej

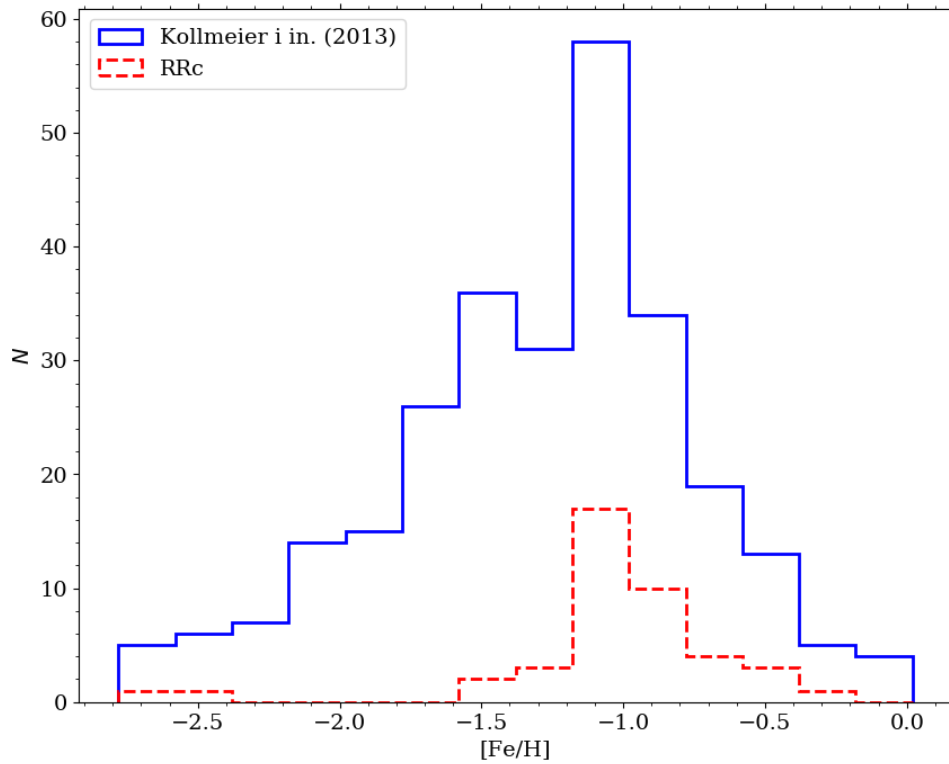


Rysunek 4.13: Diagram HR dla gwiazd RRd badanych w niniejszym rozdziale oraz dla gwiazd RRd modelowanych asterosejsmicznie przez Molnár i in. (2015) – dla każdej gwiazdy zaproponowano po dwa modele. Kolor symbolu odpowiada masie modelu.



Rysunek 4.14: Zależność  $[\text{Fe}/\text{H}] - T_{\text{eff}}$  dla gwiazd RRc z niniejszego rozdziału oraz z oryginalnego pola Keplera. Parametry dla czterech gwiazd RRc z pola Keplera zostały wyznaczone spektroskopowo przez Nemeč i in. (2013).

części pasa niestabilności. Modelowanie teoretyczne przeprowadzone w rozprawie potwierdza te przypuszczenia. W gorącej części klasycznego pasa niestabilności, blisko niebieskiej grani-



Rysunek 4.15: Rozkład metaliczności gwiazd RRc z pracy [Kollmeier i in. \(2013\)](#) oraz gwiazd RRc badanych w niniejszym rozdziale.

cy, położone są modele z niestabilnym modem pierwszym owertonowym, w których jednak mody nieradialne są stabilne. Oznacza to, że mogą istnieć gwiazdy RRc, w których brak detekcji dodatkowych sygnałów nie jest spowodowany zbyt wysokim progiem detekcji, ale brakiem wzbudzonych modów nieradialnych.

# Poszukiwanie wielomodalnych gwiazd $\delta$ Scuti

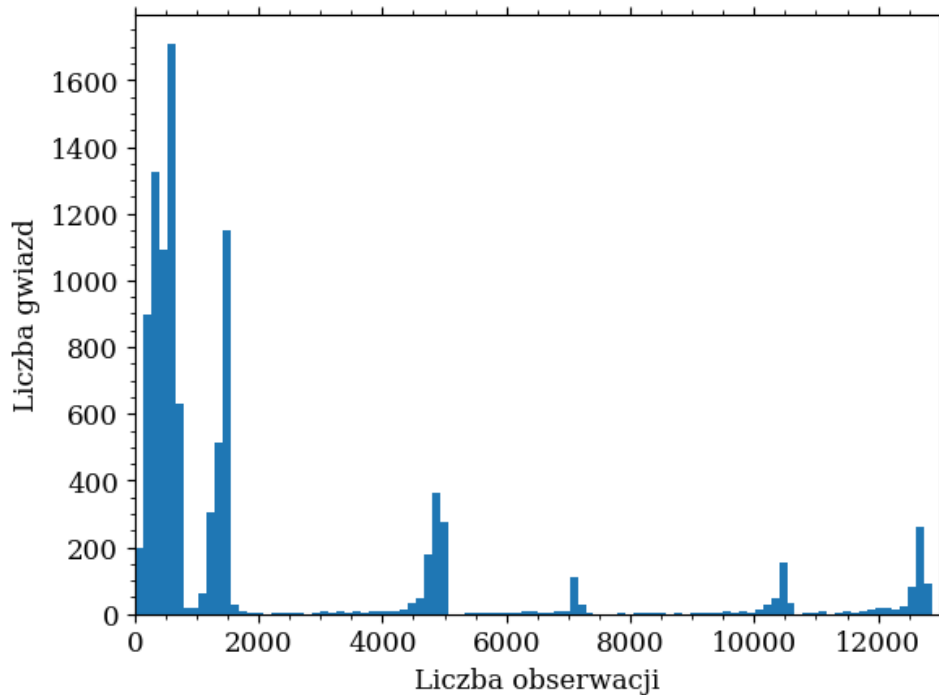
Zastosowanie gwiazd  $\delta$  Scuti w asterosejsmologii jest ograniczone przez trudności z identyfikacją modów w tych gwiazdach. W przypadku nieradialnych wielomodalnych pulsacji nie jest oczywiste, które mody są wzbudzone. To ograniczenie nie dotyczy jednak wielomodalnych pulsacji radialnych, w przypadku których jest możliwa identyfikacja modów na podstawie stosunków okresów. Pulsacje radialne najczęściej występują w gwiazdach HADS, które zostały przedstawione we wstępie niniejszej rozprawy. Celem tego rozdziału jest przedstawienie wyników poszukiwania wielomodalnych gwiazd HADS pulsujących w modach radialnych na podstawie danych OGLE dla zgrubienia centralnego Galaktyki.

## 5.1 Metody

### 5.1.1 Wykorzystane dane

W pracy wykorzystano dane z czwartej fazy projektu OGLE dla zgrubienia centralnego Galaktyki. W tych polach sklasyfikowano 10 092 gwiazd zmiennych jako gwiazdy  $\delta$  Scuti (Pietrukowicz i in. 2020). Klasyfikacja gwiazd wykonana przez Pietrukowicz i in. (2020) została przygotowana na podstawie obserwacji z lat 2010 – 2019. Wyniki przedstawione w tym rozdziale uzyskano na podstawie analizy sześciu sezonów obserwacyjnych z lat 2010 – 2015. Dzięki temu w wykorzystanych danych pojawia się mniejszy efekt zmian okresów, amplitud i średnich jasności. Takie zmiany mogą powodować pojawianie się nierozdzielonych sygnałów w kolejnych krokach procedury odejmowania częstości, a co za tym idzie podnoszą średni poziom szumu w widmie. Ponadto, podczas tak długiego przedziału obserwacji jak 10 lat, ruchy własne gwiazd mają wpływ na otrzymywane krzywe blasku. Usuwanie tego efektu także wprowadza dodatkowy szum do widm częstości. Ponieważ celem niniejszej rozprawy nie jest analiza zmienności wykrytych sygnałów, a wykrywanie dodatkowych sygnałów w widmach częstości, uzasadnione było wybranie tylko części sezonów obserwacyjnych, aby nie wprowadzać do widm dodatkowych źródeł szumu.

Szeregi czasowe gwiazd różnią się częstością obserwacji. Liczba obserwacji w filtrze  $I$  dla gwiazd z próbki wejściowej waha się od 35 do 12 906 pomiarów w latach 2010 – 2015. Na Rys. 5.1 przedstawiony jest rozkład liczby obserwacji dla badanych gwiazd. Na poziomie szumu w widmie wpływa nie tylko liczba punktów, ale także jasność gwiazdy. Wpływ obu czynników jest przedstawiony na Rys. 5.2. Gwiazdy zostały podzielone na 3 podgrupy ze względu na liczbę obserwacji  $N$ :  $N \leq 500$ ,  $500 < N \leq 5000$  i  $N > 5000$ . Poziom szumu został oszacowany w widmie Fouriera po usunięciu z widma dominującej okresowości,  $f$ , oraz jej harmonik. Wykorzystano



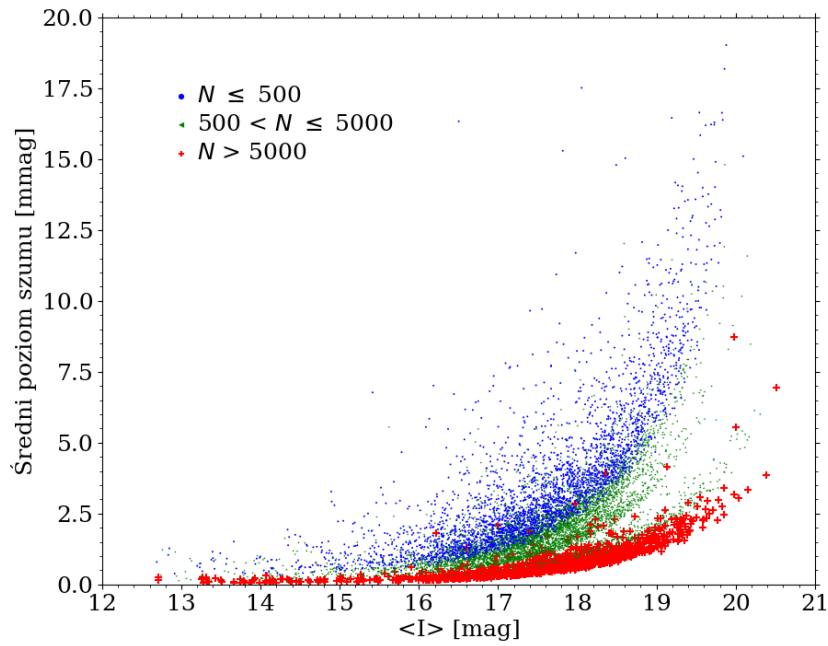
Rysunek 5.1: Rozkład liczby punktów obserwacyjnych dla badanych gwiazd  $\delta$  Scuti.

przedział częstości od  $6f$  do  $7f$ . Dla wszystkich trzech grup średni poziom szumu rośnie wraz z malejącą średnią jasnością gwiazd. Jest także większy dla gwiazd z mniejszą liczbą obserwacji. Na Rys. 5.3 przedstawione są przykładowe krzywe blasku dla gwiazdy z małą i dużą liczbą obserwacji.

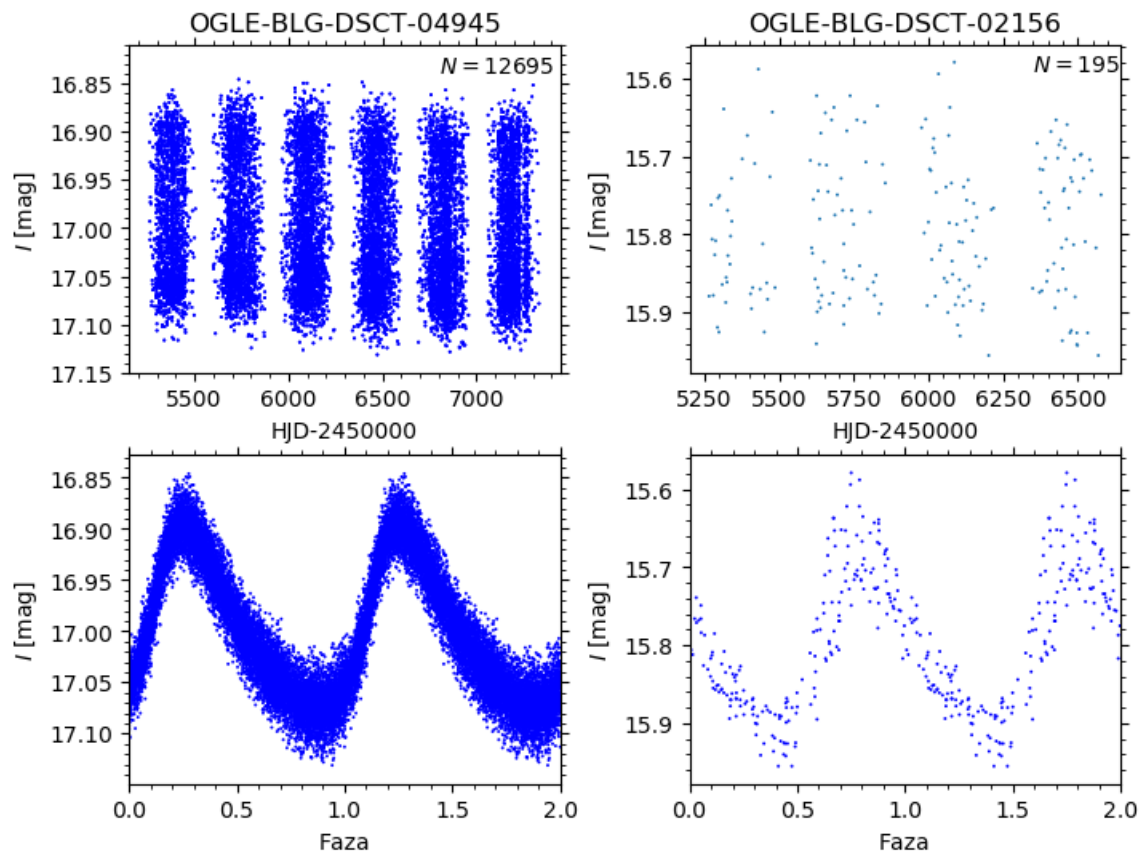
### 5.1.2 Analiza częstości

Analiza całej próbki 10 092 gwiazd  $\delta$  Scuti składała się z dwóch kroków. W pierwszym kroku automatyczny algorytm opisany w rozdziale 2 przygotował dla każdej gwiazdy listę wykrytych częstości za pomocą metody iteracyjnego odejmowania wykrywanych częstości. Jedyną różnicą w stosunku do algorytmu wykorzystanego w poszukiwaniu gwiazd RR Lutni z dodatkowymi sygnałami jest brak wykorzystania algorytmu odejmowania częstości zależnego od czasu, ponieważ zmiany okresu nie są tak częste jak w przypadku gwiazd RR Lutni oraz, jak opisano w rozdziale 5.1.1, analizę przeprowadzono na krótszych segmentach danych. Przykładem takiej listy częstości wygenerowanej przez wykorzystany algorytm jest lista przedstawiona w Tab. 5.1 dla gwiazdy OGLE-BLG-DSCT-03647. W tej gwiazdzie wykryto cztery niezależne częstości oraz dwie częstości odpowiadające liniowym kombinacjom dwóch pierwszych niezależnych częstości.

Drugim krokiem analizy było wybranie gwiazd pulsujących w kilku modach radialnych jednocześnie. Podstawowym narzędziem w tej analizie był diagram Petersena (patrz Rys. 1.3). Selekcja gwiazd opierała się na założeniu, że stosunki okresów odpowiadające ciągom lub znajdujące się w pobliżu ciągów wyznaczonych przez gwiazdy z dysku Galaktyki (Pietrukowicz i in. 2013) odpowiadają pulsacjom w modach radialnych. Spośród wszystkich wielomodalnych gwiazd do dalszej analizy wybrałam te, w których dwie częstości tworzą stosunek z przedziału  $0.75 - 0.82$ . W tym przedziale stosunku okresów spodziewamy się gwiazd  $\delta$  Scuti, które pulsują jednocześnie w modzie fundamentalnym (F) i pierwszym owertonie (1O) albo w pierwszym i drugim owertonie (2O). Do dalszej analizy wybrano 3286 gwiazd, w których wykryte częstości



Rysunek 5.2: Zależność średniego poziomu szumu w funkcji średniej jasności gwiazdy w filtrze  $I$ . Różnymi kolorami zaznaczone są gwiazdy o różnych liczbach punktów obserwacyjnych ( $N$ )



Rysunek 5.3: Przykładowe krzywe blasku dla gwiazdy OGLE-BLG-DSCT-04945 o dużej liczbie obserwacji ( $N = 12695$ ) oraz dla gwiazdy OGLE-BLG-DSCT-02156 o małej liczbie obserwacji ( $N = 195$ ). Dolne panele przedstawiają krzywe blasku sfazowane z dominującym okresem pulsacji.



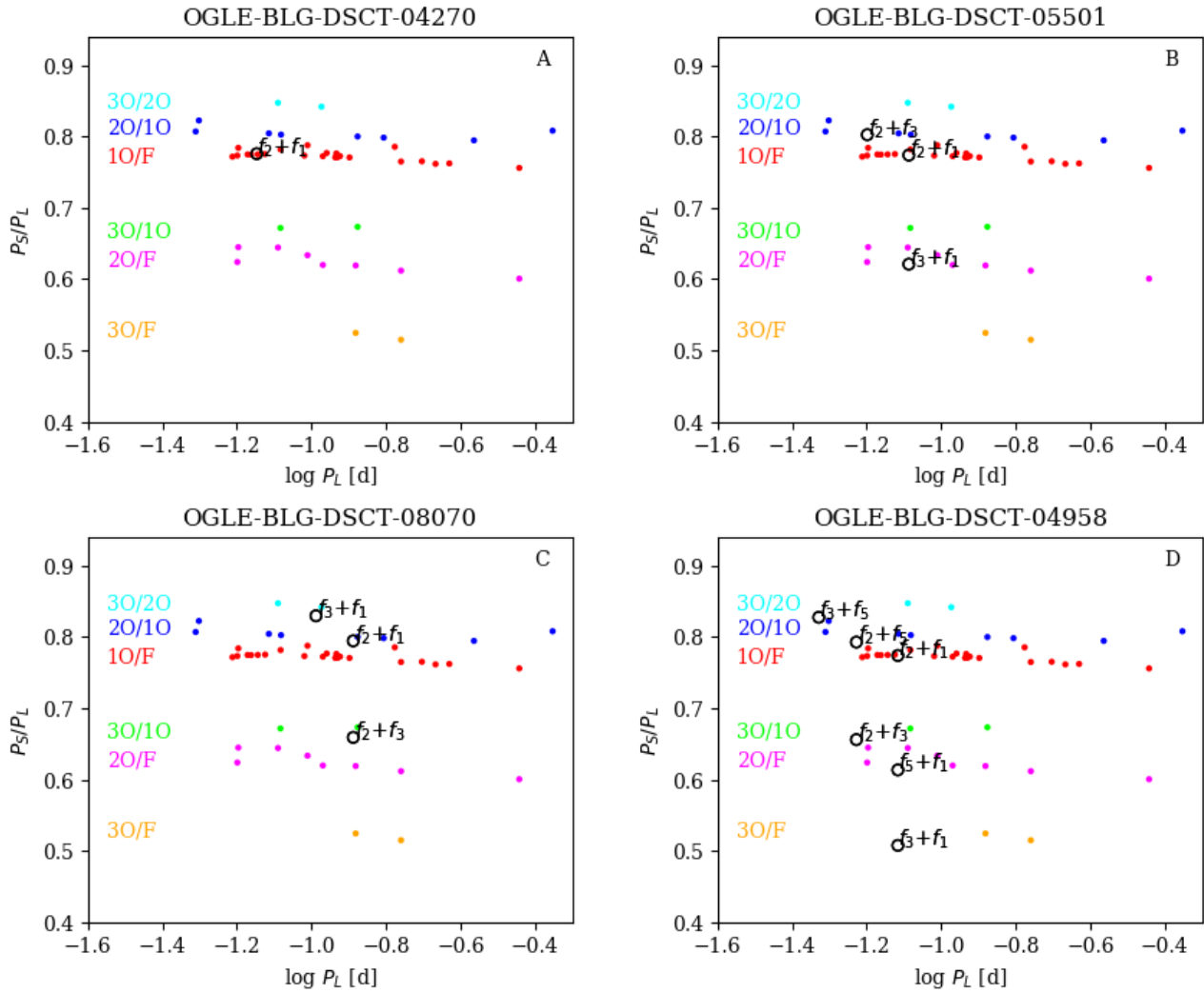
Tabela 5.1: Przykład listy częstości dla gwiazdy OGLE-BLG-DSCT-03647 wygenerowanej przez automatyczny algorytm wykorzystany w analizie. Kolejne kolumny zawierają numer wykrytej częstości, lub jej interpretację w postaci liniowej kombinacji częstości, częstość, amplitudę oraz fazę.

Sygnal	$f$ [c/d]	$A$ [mag]	$\phi$
$f_1$	15.972768(5)	0.048(1)	5.6(2)
$2f_1$	31.94554(1)	0.016(1)	1.2(4)
$f_2$	20.56591(2)	0.012(1)	5.0(8)
$f_2 - f_1$	4.59314(2)	0.008(1)	3.4(8)
$f_1 + f_2$	36.53868(2)	0.007(1)	0.4(8)
$f_3$	46.91555(5)	0.006(1)	6(2)
$f_4$	18.61421(5)	0.006(1)	0(2)

tworzą stosunki okresów z powyższego przedziału. Liczba ta stanowi 33% całej próbki gwiazd  $\delta$  Scuti. Dla każdej z tych gwiazd przygotowano diagram Petersena, na którym zaznaczono wszystkie stosunki okresów tworzone przez sygnały znalezione w widmie częstości oraz stosunki okresów gwiazd z dysku Galaktyki jako odniesienie (Pietrukowicz i in. 2013). Diagram Peterse-  
na dla każdej z gwiazd był analizowany indywidualnie. Na jego podstawie wybrano te gwiazdy, które odpowiadają ciągom stosunków okresów modów radialnych. Z kilku powodów, podczas selekcji klasyfikowano również gwiazdy o stosunkach okresów odbiegających od tych wyznaczonych dla gwiazd z dysku galaktycznego. Po pierwsze, liczba gwiazd z dysku galaktycznego jest znacznie mniejsza niż liczba gwiazd ze zgrubienia centralnego Galaktyki. Część ciągów zdefiniowanych na podstawie gwiazd z dysku zawiera jedynie dwa obiekty, np. ciąg odpowiadający pulsacjom F+3O i 1O+3O. W związku z tym nie jest możliwe ocenienie rozrzutu stosunku okresów na podstawie próbki z dysku. Po drugie, gwiazdy  $\delta$  Scuti ze zgrubienia centralnego zawierają obiekty pochodzące z różnych populacji i o różnych metalicznościach. Stosunek okresów silnie zależy od metaliczności. Z tego powodu analizowane gwiazdy odstające od ciągów zdefiniowanych przez gwiazdy z dysku nie były odrzucane, a sklasyfikowane jako kandydatki na gwiazdy pulsujące w modach radialnych. Ponadto, klasyfikowane były także gwiazdy w szerszym zakresie okresów.

Przykłady diagramów Petersena służących klasyfikacji pulsacji wielomodalnych dla czterech gwiazd zostały zaprezentowane na Rys. 5.4. Gwiazda OGLE-BLG-DSCT-04270 została sklasyfikowana jako dwumodalna F+1O. Gwiazdy OGLE-BLG-DSCT-05501 oraz OGLE-BLG-DSCT-08070 jako trójmodalne, przy czym pierwsza z nich jako pulsująca w F+1O+2O, a druga w 1O+2O+3O. Gwiazda OGLE-BLG-DSCT-04958 została sklasyfikowana jako pulsująca w czterech modach radialnych jednocześnie F+1O+2O+3O. W części gwiazd, w których sygnały pasowały do ciągów dla pulsacji radialnych, widoczne były także sygnały tworzące stosunki okresów niepasujące do tych ciągów. Najprawdopodobniej w tych gwiazdach obecne są równocześnie mody radialne jak i nieradialne, co jest spotykane w gwiazdach  $\delta$  Scuti.

Dodatkowo sprawdzono zakres stosunków okresów odpowiadający pulsacjom w modach F+2O, F+3O oraz 1O+3O, aby wyselekcjonować kandydatki na gwiazdy dwumodalne. Spośród gwiazd znajdujących się w odpowiadających przedziałach stosunków okresów wybrano te, w widmach których wykryto kombinacje liniowe pomiędzy częstościami dwóch modów.



Rysunek 5.4: Przykładowe diagramy Petersena, na podstawie których sklasyfikowano mody pulsacji w czterech gwiazdach. Kolorem zaznaczone są gwiazdy pochodzące z dysku galaktycznego (Pietrukowicz i in. 2013), które służyły jako odniesienie. Kolorem podane są także interpretacje stosunków okresów. Czarnymi punktami podane są częstości znalezione w gwiazdach. Na panelu A jest przedstawiona gwiazda sklasyfikowana jako dwumodalna F+10. Na panelu B jest przedstawiona gwiazda sklasyfikowana jako trójmodalna F+10+20, a na panelu C znajduje się gwiazda trójmodalna 10+20+30. Na panelu D znajduje się gwiazda sklasyfikowana jako czteromodalna F+10+20+30.

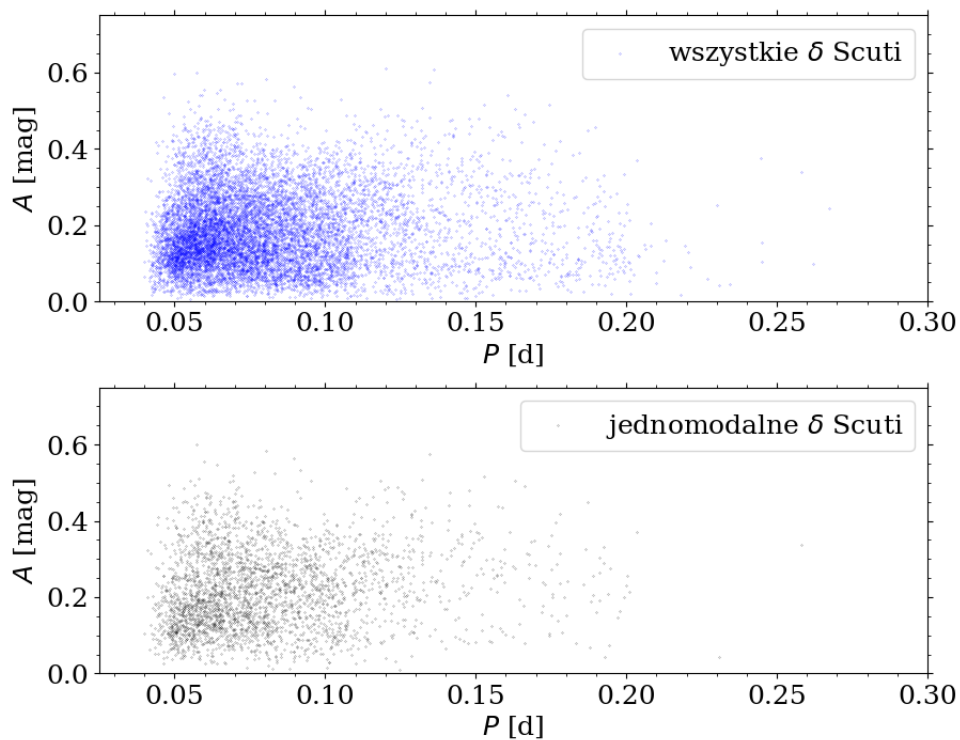
## 5.2 Wyniki

### 5.2.1 Dodatkowe sygnały w gwiazdach $\delta$ Scuti

Lista częstości została przygotowana przez automatyczny algorytm dla każdej gwiazdy z badanej próbki liczącej 10 092 gwiazd. W 2872 gwiazdach znaleziono tylko jeden niezależny sygnał, zatem są one jednookresowe, natomiast w pozostałych gwiazdach znaleziono co najmniej dwa niezależne sygnały. Największa liczba niezależnych częstości została znaleziona w dwóch gwiazdach i wynosi 15. Liczba gwiazd z daną liczbą niezależnych częstości jest przedstawiona w Tab. 5.2. Najliczniejszą grupą, liczącą 2947 obiektów, są gwiazdy dwuokresowe. Znalezione sygnały w gwiazdach wielookresowych, które nie odpowiadały ciągom dla pulsacji radialnych

Tabela 5.2: Rozkład liczby wykrytych niezależnych częstości w badanych gwiazdach. Kolejne kolumny zawierają liczbę niezależnych częstości, liczbę gwiazd o takiej liczbie częstości oraz część jaką stanowią one w stosunku do całej próbki 10 092 gwiazd  $\delta$  Scuti.

Liczba sygnałów	$N$	$N/N_{\text{tot}}$ [%]
1	2872	28 %
2	2947	29 %
3	2007	20 %
4	1177	12 %
5	565	6 %
6	267	3 %
7	116	1 %
8	54	<1 %
9	36	<1 %
10	19	<1 %
11	14	<1 %
12	10	<0.1 %
13	4	<0.1 %
14	2	<0.1 %
15	2	<0.1 %
16	0	-



Rysunek 5.5: Zależność pełnej amplitudy krzywej blasku w funkcji okresu dla wszystkich analizowanych gwiazd  $\delta$  Scuti (górny panel) oraz dla jednomodalnych gwiazd  $\delta$  Scuti (dolny panel).

Tabela 5.3: Liczba gwiazd pulsujących w co najmniej dwóch modach radialnych jednocześnie. Kolejne kolumny zawierają rodzaj pulsacji wielomodalnych, liczbę gwiazd oraz procent jaki stanowią w stosunku do całej próbki gwiazd  $\delta$  Scuti.

Typ pulsacji	$N$	$N/N_{\text{tot}}$
F+1O	2333	23.1 %
1O+2O	256	2.5 %
F+1O+3O	221	2.2 %
F+1O+2O	145	1.4 %
1O+2O+3O	48	0.5 %
1O+3O	25	0.2 %
F+3O	23	0.2 %
F+2O	18	0.2 %
F+1O+2O+3O	14	0.1 %

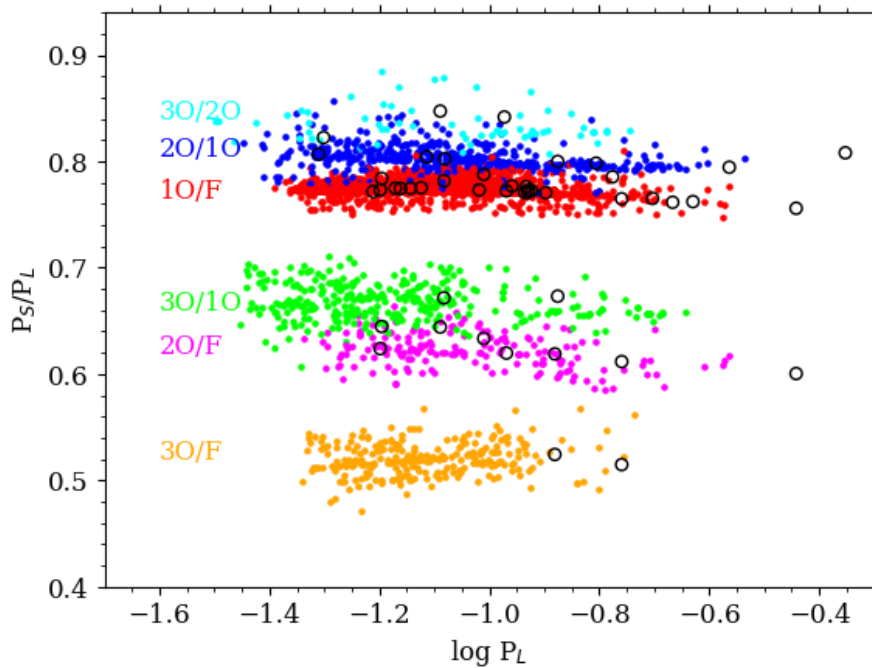
zostały pominięte i nie były badane w dalszej części pracy, ale są uwzględnione w Tab. 5.2. Sygnały nie pasujące do pulsacji radialnych mogą pochodzić od dodatkowych modów nieradialnych, od innych gwiazd, które nie są rozdzielone z obserwowanym obiektem, od układów podwójnych, ale także od sygnałów instrumentalnych, które nie zostały odpowiednio usunięte. Natura tych sygnałów nie była badana w niniejszej pracy.

Na Rys. 5.5 przedstawiono pełną amplitudę dla wszystkich badanych gwiazd  $\delta$  Scuti w funkcji okresu (górny panel) oraz tą samą zależność dla gwiazd sklasyfikowanych jako jednomodalne (dolny panel). W przypadku gwiazd wielomodalnych przyjęto okres głównego modu pulsacji, czyli o najwyższej amplitudzie w widmie częstości. Obie grupy pokrywają ten sam zakres wartości amplitud a także okresów pulsacji. Dla większości gwiazd, okresy pulsacji są krótsze niż 0.2 dnia. Na obu diagramach nie widać wyraźnych struktur ani zgrupowań.

### 5.2.2 Wielomodalne radialne gwiazdy $\delta$ Scuti

Głównym celem przeprowadzonej analizy jest selekcja kandydatek na gwiazdy pulsujące w co najmniej dwóch modach radialnych jednocześnie. Wyniki selekcji są zebrane w Tab. 5.3 z podziałem na rodzaj pulsacji wielomodalnych. Najliczniejszą grupę stanowią gwiazdy pulsujące jednocześnie w modzie fundamentalnym oraz pierwszym owertonie (F+1O). Grupa ta zawiera 2333 obiekty. Gwiazdy pulsujące w modzie pierwszym i drugim owertonowym (1O+2O) liczą 256 obiektów. Znacznie mniej liczne są gwiazdy pulsujące w modzie fundamentalnym i drugim owertonie (F+2O), w modzie fundamentalnym i trzecim owertonie (F+3O) oraz w pierwszym i trzecim owertonie (1O+3O). Jednak na grupy gwiazd F+2O, F+3O oraz 1O+3O był nałożony dodatkowy warunek, że sygnały sklasyfikowane jako pochodzące od modów radialnych muszą tworzyć częstość kombinacyjną. Dodatkowe kryterium dla tych grup zostało nałożone ze względu na ich rzadsze występowanie. Nie tworzą też wyraźnych ciągów, jak to się dzieje w przypadku gwiazd F+1O oraz 1O+2O. Liczebności grup F+2O, F+3O i 1O+3O są zatem dolnymi granicami występowania tego typu pulsacji w analizowanej próbce. Najliczniejszą grupą gwiazd trójmodalnych są gwiazdy pulsujące w modzie fundamentalnym oraz pierwszym i trzecim owertonie (F+1O+3O). Grupa ta liczy 221 obiektów. Sklasyfikowałam 145 gwiazd jako pulsujące w modzie fundamentalnym oraz pierwszym i drugim owertonie (F+1O+2O) oraz 48 jako pulsujące w pierwszym, drugim i trzecim owertonie jednocześnie (1O+2O+3O). 14 gwiazd sklasyfikowałam jako pulsujące w czterech modach radialnych jednocześnie (F+1O+2O+3O).

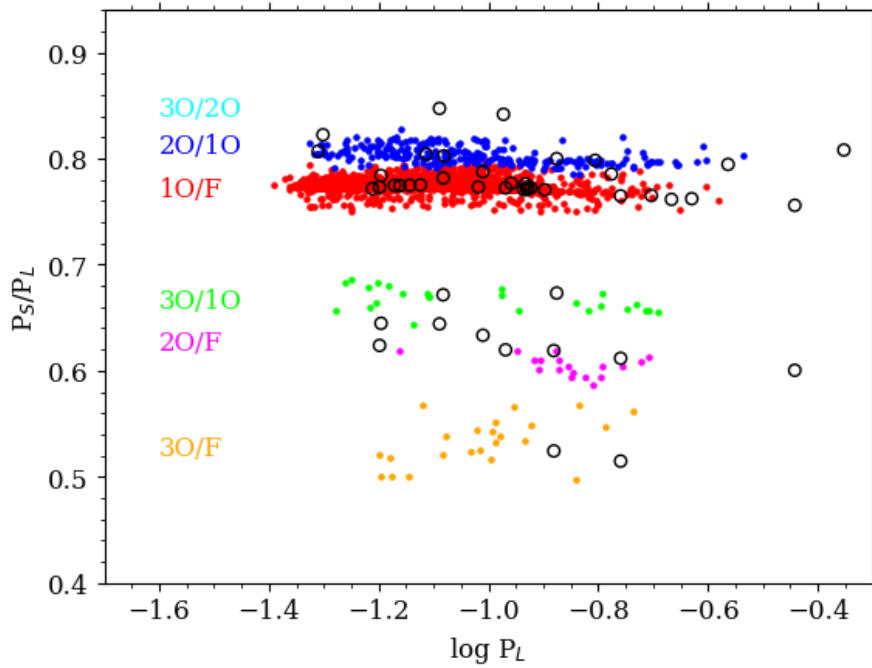
Interesujące są gwiazdy sklasyfikowane jako F+1O+3O, ponieważ drugi owerton nie jest wi-



Rysunek 5.6: Diagram Petersena dla gwiazd  $\delta$  Scuti sklasyfikowanych jako pulsujące w co najmniej dwóch modach radialnych jednocześnie. Gwiazdy analizowane w niniejszej pracy są zaznaczone za pomocą kolorowych punktów, przy czym kolorem zaznaczone są ciągi odpowiadające poszczególnym stosunkom okresów. Za pomocą czarnych okręgów zaznaczono wielomodalne radialne gwiazdy  $\delta$  Scuti obserwowane w dysku Galaktyki (Pietrukowicz i in. 2013).

doczny. Podobna sytuacja występuje w gwiazdach dwumodalnych sklasyfikowanych jako F+2O, F+3O oraz 1O+3O. Poleski i in. (2010) także sklasyfikował sześć gwiazd  $\delta$  Scuti jako 1O+3O. Znane są także Cefeidy pulsujące w modach 1O+3O z pominięciem drugiego owertonu pomiędzy 1O a 3O (Soszyński i in. 2008, 2017). Brak detekcji jednego z owertonów pomiędzy dwoma obserwowanymi jest ciekawy z punktu widzenia problemu selekcji modów, który nie jest w dalszym ciągu w pełni zrozumiany. Bazując na położeniu granic pasa niestabilności dla kolejnych modów radialnych (rys. 2 w pracy Dupret i in. 2005) spodziewamy się, że drugi owerton powinien być wzbudzony, jeżeli wzbudzony jest pierwszy oraz trzeci owerton. Brak detekcji może być spowodowany brakiem wzbudzenia tego modu, co musiałoby zostać wyjaśnione na gruncie selekcji modów w gwiazdach, lub amplituda modu jest poniżej progu detekcji. Soszyński i in. (2008) zauważyli, że obie Cefeidy 1O+3O grupują się na diagramie Petersena razem z Cefeidami trójmodalnymi 1O+2O+3O i postulowali, że obie grupy należą do tej samej klasy wielomodalnych Cefeid. W pracy Soszyński i in. (2015) na podstawie analizy danych OGLE-IV w jednej z gwiazd 1O+3O wykryto kolejny sygnał odpowiadający drugiemu owertonowi. Jest możliwe, że w gwiazdach  $\delta$  Scuti sklasyfikowanych jako F+1O+3O, F+2O, F+3O oraz 1O+3O również występują brakujące owertony, jednak o amplitudach poniżej progu detekcji. Byłaby to sytuacja analogiczna do zapostulowanej dla Cefeid, oraz zaobserwowanej w części z nich.

Na diagramie Petersena na Rys. 5.6 zaprezentowane są wszystkie gwiazdy  $\delta$  Scuti sklasyfikowane jako pulsujące w co najmniej dwóch modach radialnych jednocześnie. Dla porównania przedstawiono również wielomodalne radialne gwiazdy  $\delta$  Scuti z dysku Galaktyki (Pietrukowicz i in. 2013). Na Rys. 5.7 przedstawiono jedynie te gwiazdy  $\delta$  Scuti, które pulsują w dwóch modach radialnych. Oba rysunki sugerują, że rozrzut punktów jest większy w przypadku gwiazd z tej analizy niż w przypadku gwiazd z dysku Galaktycznego. Obserwowany rozrzut jest związany



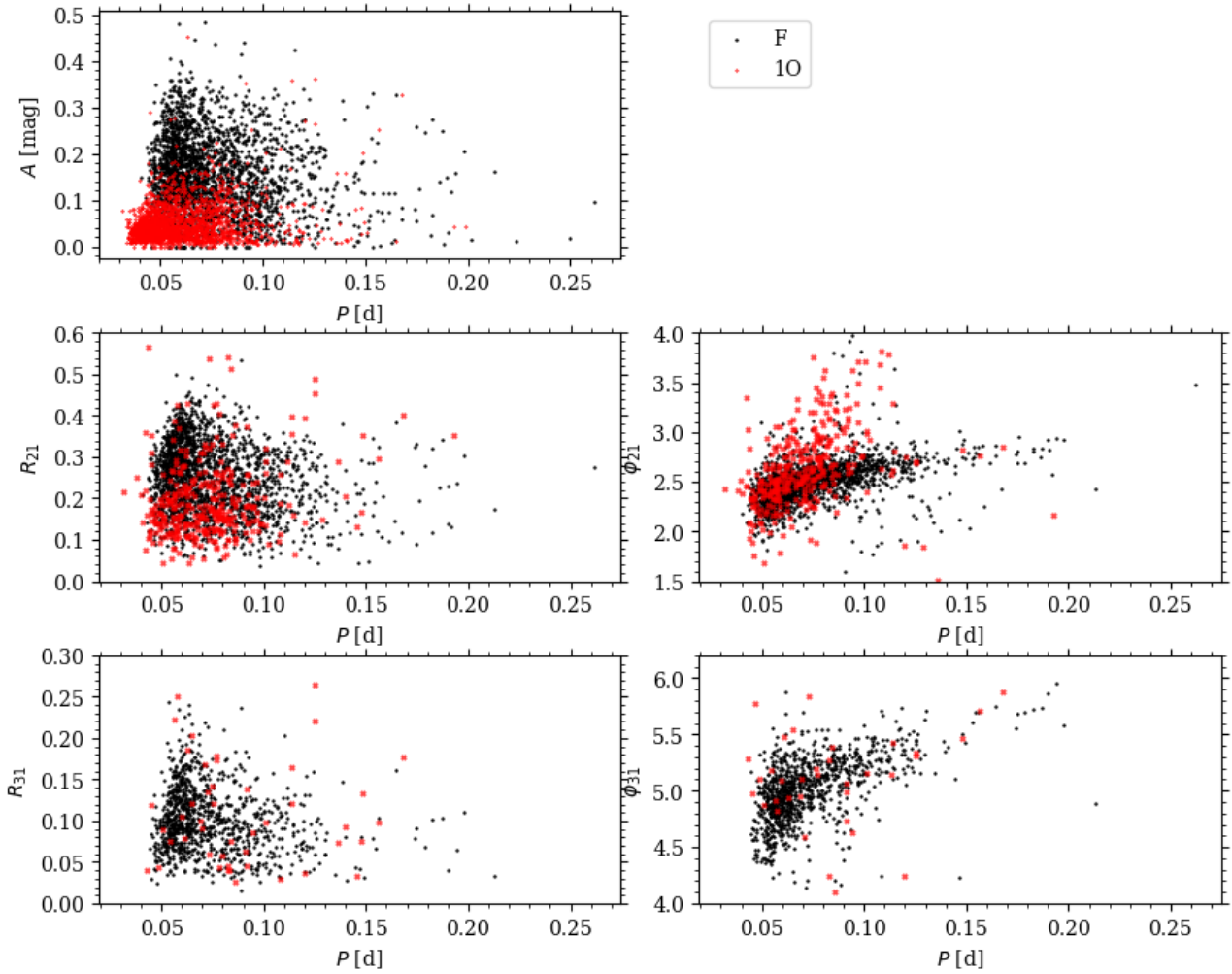
Rysunek 5.7: To samo co Rys. 5.6, jednak jedynie dla gwiazd pulsujących w dwóch modach radialnych.

z metodą selekcji kandydatek dopuszczającą pewne odstawanie od ciągów wyznaczonych przez gwiazdy z dysku Galaktyki z przyczyn podanych wcześniej. W kolejnym rozdziale przeprowadzone zostanie modelowanie asterosejsmiczne przedstawionych kandydatek na wielomodalne radialne gwiazdy HADS. Jego wyniki sugerują, że ciągi na diagramie Petersena odpowiadające różnym typom pulsacji radialnych mają faktycznie mniejszy rozrzut, a w części sklasyfikowanych gwiazd, w rzeczywistości wzbudzone są zarówno mody radialne jak i nieradialne.

### 5.2.3 Analiza gwiazd dwumodalnych F+1O

Gwiazdy  $\delta$  Scuti charakteryzują się dużą różnorodnością kształtów krzywych blasku, co było pokazane szczegółowo w pracy Pietrukowicz i in. (2020). Również w tej pracy zostały przeanalizowane wartości współczynników Fouriera opisujące kształt krzywych blasku gwiazd jednomodalnych w funkcji okresu. W tym rozdziale wykorzystałam gwiazdy sklasyfikowane jako pulsujące w modach F+1O, aby zbadać, czy na podstawie współczynników Fouriera, zdefiniowanych jako stosunki amplitud i różnice faz (równania 1.9 i 1.10 w rozdziale 1), można rozróżnić czy krzywa blasku odpowiada pulsacjom w modzie fundamentalnym czy pierwszym owertonowym. W tym celu krzywe blasku gwiazd pulsujących w modach F+1O zostały rozdzielone na krzywe odpowiadające pulsacjom w modzie fundamentalnym i krzywe odpowiadające pulsacjom w modzie pierwszym owertonowym. Następnie te krzywe zostały opisane za pomocą współczynników Fouriera. Przebiegi amplitudy krzywych blasku oraz współczynników Fouriera w funkcji okresu pulsacji dla krzywych odpowiadających pulsacjom w modzie fundamentalnym i pierwszym owertonie zostały przedstawione na Rys. 5.8. Krzywe odpowiadające pulsacjom w pierwszym owertonie mają znacznie mniejsze amplitudy niż krzywe odpowiadające pulsacjom w modzie fundamentalnym. Konsekwencją są niższe wartości stosunków amplitud  $R_{21}$  dla krzywych blasku odpowiadających pulsacjom w modzie pierwszym owertonowym niż w modzie fundamentalnym. Jednak zakres możliwych przyjmowanych wartości jest podobny dla

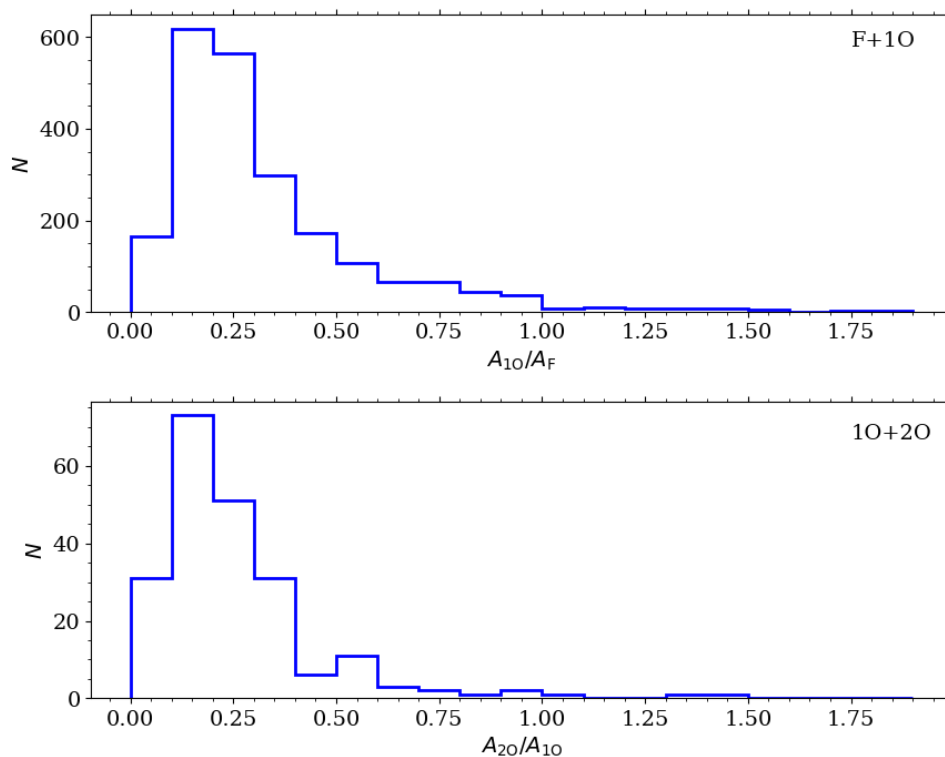




Rysunek 5.8: Amplituda i współczynniki Fouriera dla krzywych blasku odpowiadających pulsacjom w modzie fundamentalnym (czarne punkty) i w modzie pierwszym owertonowym (czerwone punkty) wyznaczone dla gwiazd  $\delta$  Scuti sklasyfikowanych jako pulsujące w modzie F+1O.

obu rodzajów pulsacji. W przypadku pozostałych współczynników Fouriera również nie widać wyraźnego kryterium na podstawie którego można by rozróżnić krzywe blasku odpowiadające dwóm różnym typom pulsacji.

Na Rys. 5.9 przedstawiono stosunek pełnych amplitud krzywych blasku odpowiadających obu modom dla gwiazd dwumodalnych sklasyfikowanych jako pulsujące w F+1O (górny panel) oraz 1O+2O (dolny panel). Zakres osi poziomej został ograniczony ze względu na małą liczbę gwiazd o wartościach stosunków amplitud  $A_{10}/A_F$  i  $A_{20}/A_{10}$  powyżej 1. Powyżej tej wartości znajduje się 7% gwiazd F+1O oraz 17% gwiazd 1O+2O. Oznacza to, że w większości gwiazd F+1O dominującym modem jest mod fundamentalny, natomiast w większości gwiazd 1O+2O dominującym modem jest pierwszy owerton.



Rysunek 5.9: Stosunek amplitud obu modów radialnych dla krzywych blasku odpowiadających pulsacjom F+1O (górny panel) oraz 1O+2O (dolny panel). Ze względu na małą liczbę gwiazd o stosunkach amplitud o wartościach ponad 2.0, ograniczono zakres osi poziomej do tej wartości.

# Modelowanie gwiazd typu $\delta$ Scuti

W tym rozdziale przedstawione jest modelowanie asterosejsmiczne wielomodalnych gwiazd HADS, które zostały wyselekcjonowane na podstawie obserwacji z projektu OGLE-IV dla pól zgrubienia centralnego (patrz rozdział 5). W celu modelowania wykorzystano kod ewolucyjny MESA – *Modules for Experiments in Stellar Astrophysics* (Paxton i in. 2011, 2013, 2015, 2018, 2019) oraz warszawski kod pulsacyjny (Dziembowski 1977b).

## 6.1 Obliczenia

Kod MESA to jednowymiarowy kod ewolucyjny regularnie rozwijany od 2010 roku. Powstał na podstawie kodu ewolucyjnego EZ (Eggleton 1971; Paxton 2004) służącego do liczenia ewolucji małowymiarowych gwiazd od ciągu głównego wieku zerowego (ZAMS – *Zero Age Main Sequence*) do błysku helowego na gałęzi czerwonych olbrzymów. MESA wykorzystuje efektywne metody numeryczne dostosowane do obecnych możliwości obliczeniowych i daje możliwość m.in. liczenia wielowątkowego. Zaletą MESA jest jawność kodu źródłowego (kod *open source*). Możliwości kodu MESA są bardzo szerokie. Umożliwia liczenie ewolucji zarówno małowymiarowych gwiazd oraz planet, jak i bardzo masywnych gwiazd III populacji, a także badanie ewolucji układów podwójnych, czy akrecji. W niniejszej rozprawie wykorzystano wersję 11701 (tzw. *official release*) kodu MESA do liczenia ewolucji gwiazd pojedynczych, które są małowymiarowe i znajdują się na ciągu głównym lub są krótko po odejściu od ciągu głównego. Obliczenia ewolucyjne bazują na podstawowych równaniach ewolucji, a ich implementacja i metody obliczeń są przedstawione w pracach instrumentalnych kodu MESA (Paxton i in. 2011, 2013, 2015, 2018, 2019).

Za pomocą kodu ewolucyjnego MESA policzone zostały modele wzdłuż ciągów ewolucyjnych dla różnych parametrów wejściowych, czyli dla różnych mas oraz metaliczności i różnych wartości parametru przestrzelania z konwektywnego jądra. Masy zostały przyjęte z zakresu  $0.8 - 2.5 M_{\odot}$  z krokiem  $0.05 M_{\odot}$ , a metaliczności  $[Fe/H]$  z zakresu od  $-2.0$  do  $+0.5$  dex z krokiem  $0.125$  dex. Obfitości  $X$  i  $Z$  uzyskano za pomocą wzorów 4.2 oraz 4.3. Dla każdego zestawu parametrów wejściowych liczone ścieżki ewolucyjne dopóki temperatura efektywna modelu była wyższa od  $5500$  K. Ta wartość temperatury jest znacznie niższa niż temperatura odpowiadająca czerwonej granicy pasa niestabilności.

W obszarach konwekcji w otoczkach gwiazdowych, transport konwektywny jest modelowany za pomocą teorii drogi mieszania (np. Cox i Giuli 1968). W kodzie MESA trzeba zatem podać parametr drogi mieszania  $\alpha_{MLT}$ . Został on przez mnie wyznaczony na podstawie tzw. kalibracji słonecznej. Kod MESA zawiera algorytm służący do kalibracji, który liczy modele ewolucji Słońca od chwili powstania do obecnego wieku z parametrami wejściowymi zmienianymi tak, aby otrzymać obecnie obserwowane parametry. Wykorzystuje przy tym algorytm Simplex (Nel-

der i Mead 1965) w celu optymalizacji wyników. Parametry końcowe, których odtworzenie jest celem algorytmu, to metaliczność słoneczna  $[\text{Fe}/\text{H}] = 0.0$ , jasność  $\log L/L_{\odot} = 1.0$ , temperatura efektywna  $T_{\text{eff}} = 5777$  K oraz stosunek obfitości metali do obfitości wodoru na powierzchni  $Z/X = 0.0181$  (Asplund i in. 2009). Parametry wejściowe to początkowa obfitość helu i metali oraz parametr drogi mieszania  $\alpha_{\text{MLT}}$ . Czas ewolucji modelu to  $4.61 \cdot 10^9$  lat, co odpowiada  $4 \cdot 10^7$  lat ewolucji przed ciągiem głównym oraz  $4.57 \cdot 10^9$  lat ewolucji na ciągu głównym (Bahcall i in. 2006). W wyniku działania algorytmu otrzymałam model najlepiej odtwarzający obserwowane parametry Słońca, dla którego parametr drogi mieszania został wyznaczony na  $\alpha_{\text{MLT}} = 1.76$ . Ta wartość została przyjęta podczas modelowania gwiazd w tym rozdziale.

Z występowaniem konwekcji związane jest zjawisko przestrzeliwania, polegające na tym, że elementy konwektywne przemieszczają się poza obszar niestabilności konwektywnej. Przestrzeliwanie opisane jest w kodzie MESA jako sparametryzowany proces dyfuzyjny. W tradycyjnym opisie, droga jaką przebywa element konwektywny poza obszarem konwektywnym wynosi  $d_{\text{ov}} = \alpha_{\text{ov}} H_{\text{P}}$ , gdzie  $H_{\text{P}}$  to lokalna ciśnieniowa skala wysokości, a  $\alpha_{\text{ov}}$  to parametr przestrzeliwania. W tej analizie wykorzystałam opis w postaci eksponencjalnej z pracy Herwig (2000):

$$d_{\text{ov}} = D_{\text{conv},0} \exp\left(-\frac{2z}{fH_{\text{P}}}\right), \quad (6.1)$$

gdzie  $D_{\text{conv},0}$  to współczynnik dyfuzji dla konwekcji w ustalonym punkcie blisko granicy strefy konwektywnej, który jest liczony w ramach teorii drogi mieszania,  $z$  to odległość z tego punktu w kierunku strefy promienistej, a  $f$  to wolny parametr. Parametr  $f$  w opisie eksponencjalnym jest związany z tradycyjnym parametrem wzorem:  $f \approx 0.1\alpha_{\text{ov}}$  (Moravveji 2015). W tej analizie zostały zbadane cztery wartości parametru przestrzeliwania z konwektywnego jądra palącego wodoru  $f_{\text{H}}$ : 0 (czyli brak przestrzeliwania), 0.01, 0.02 oraz 0.03. Wartość parametru przestrzeliwania z konwektywnej otoczki,  $f_{\text{env}}$ , ustalono na 0.01.

W części warstw, w których warunek na stabilność konwektywną Ledoux jest spełniony, natomiast warunek Schwarzschilda nie (patrz np. Kippenhahn i Weigert 1990), występuje rodzaj mieszania zwany półkonwekcją. Jest to także zależny od czasu sparametryzowany proces dyfuzyjny, opisany współczynnikiem dyfuzji (Langer i in. 1985). W tej analizie parametr  $\alpha_{\text{sc}}$ , opisujący efektywność procesu mieszania, został ustalony na 0.1.

W modelowaniu założono sferycznie symetryczny model gwiazdy, a efekt pól magnetycznych i rotacji jest pominięty. Wykorzystałam nieprzezroczystości z projektu OPAL (Iglesias i Rogers 1996) uzupełnione o tablice nieprzezroczystości dla niskich temperatur (Ferguson i in. 2005). Przyjęłam tablice fotosferyczne (Hauschildt i in. 1999a,b; Castelli i Kurucz 2003) w celu opisu atmosfery. Parametry kontrolujące zdolność rozdzielczą, zarówno w czasie, jak i w przestrzeni (struktura modelu) dobrano na podstawie serii testów, tak aby zapewnić zbieżność rachunków i rozsądny czas obliczeń. Sterowanie obliczeniami w kodzie MESA odbywa się poprzez pliki sterujące (tzw. *inlisty*). Przykładowy plik jest przedstawiony w załączniku C.

Liniowe modele pulsacyjne liczone warszawskim kodem pulsacyjnym (Dziembowski 1977b). Kod pulsacyjny korzysta z całej struktury gwiazdy, która jest przekazywana do niego z kodu ewolucyjnego w postaci parametrów  $A_k$ , gdzie  $k = 1, \dots, 13$ . Parametry te są zdefiniowane w pracy (Dziembowski 1977b). Wynikiem działania kodu pulsacyjnego są częstości modów oraz ich tempa narastania. W kodzie pulsacyjnym wykorzystane jest tzw. włożone przybliżenie konwekcji. Oznacza to, że w analizie liniowej nie uwzględnia się zaburzeń wielkości konwektywnych. W praktyce prowadzi to do braku czerwonej granicy pasa niestabilności. Wykorzystane przybliżenie ma też wpływ na pozycję niebieskiej granicy pasa niestabilności, jednak wpływ ten jest relatywnie mały. W związku z tym, wykorzystałam jedynie wyznaczenie pozycji niebieskiej granicy pasa niestabilności, aby ograniczyć liczbę modeli rozważanych w siatce. Modele dopa-

sowano do obserwacji nie uwzględniając ograniczeń wynikających z istnienia czerwonej granicy. W kolejnym kroku, położenie modeli na diagramie HR, które najlepiej opisywały obserwowane gwiazdy, zostało porównane z pozycją czerwonej granicy wyznaczoną zarówno na podstawie obserwacji jak i przewidywań teoretycznych dostępnych w literaturze. Będzie to szczegółowo przedyskutowane w dalszej części rozdziału.

Siatka wykorzystana w celu dopasowania modeli do obserwowanych gwiazd została policzona przy pewnych założeniach (ustalone parametry np. półkonwekcji, parametru drogi mieszania, przestrzeliwania z konwektywnej otoczki, nie uwzględnienie rotacji). Każde takie założenie ma pewien wpływ na wynikowe wartości. Szczegółowa analiza wykracza jednak poza ramy doktoratu. W szczególności uwzględnienie rotacji, z uwagi na dużą czasochłonność rachunków ewolucyjnych i zwiększoną złożoność siatki, może stanowić odrębny projekt. Przedstawione dalej wyniki, mogą wtedy stanowić bardzo dobry punkt wyjściowy do dyskusji efektów związanych z rotacją.

### 6.1.1 Dopasowanie modeli do obserwacji

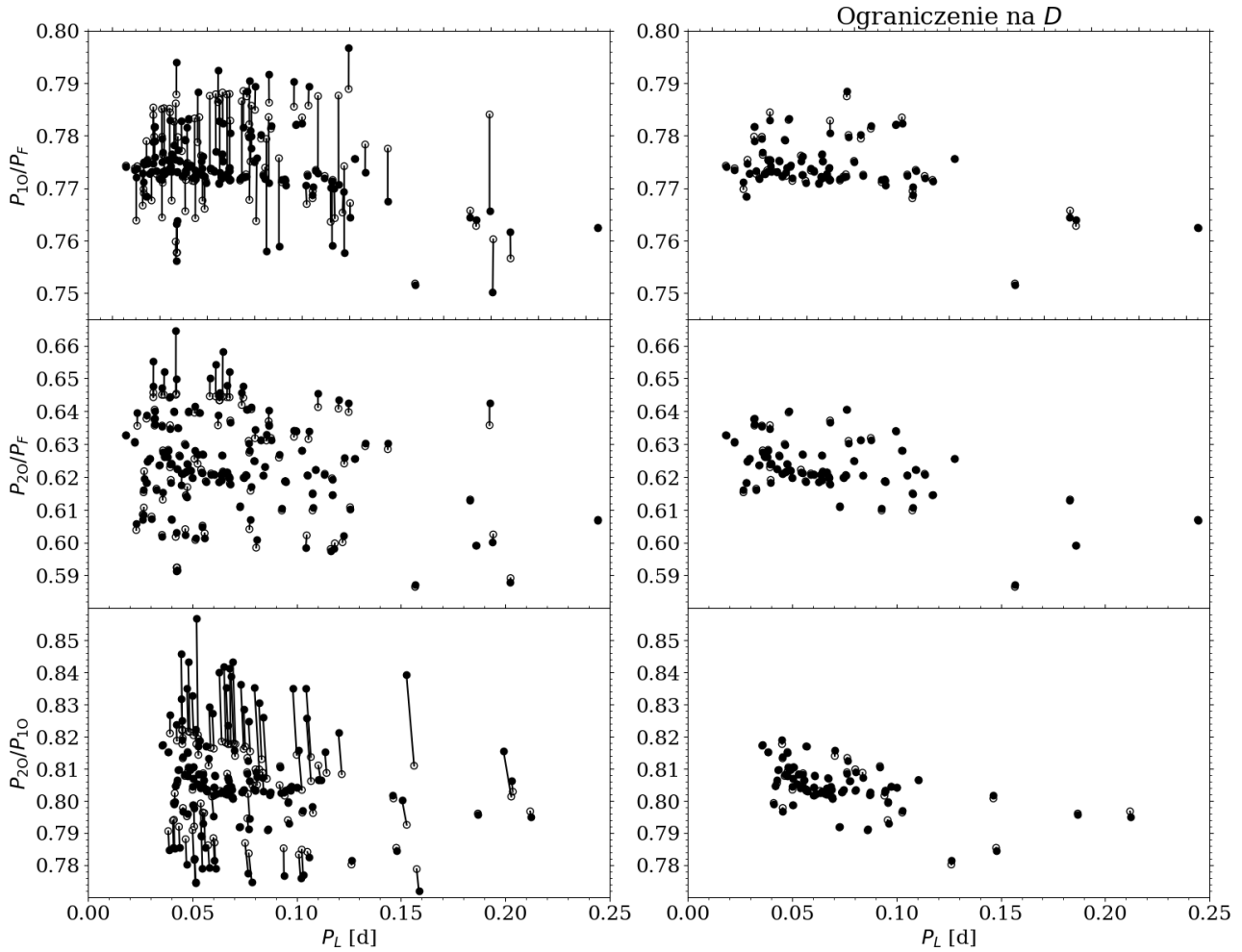
Dla każdej gwiazdy z 428 co najmniej trójmodalnych gwiazd opisanych w rozdziale 5, i dla każdej policzonej ścieżki ewolucyjnej wybrano model, w którym okresy i stosunki okresów najlepiej oddawały obserwowane wartości. Aby wybrać najlepszy model dla każdej gwiazdy minimalizowano wartość parametru  $D^2$ <sup>1</sup>, który opisuje różnicę między obserwowanymi najdłuższymi okresami pulsacji i wszystkimi stosunkami okresów dla danego typu radialnych pulsacji wielomodalnych:

$$D^2 = \left( \frac{P_{\text{longest}}^m - P_{\text{longest}}^o}{P_{\text{longest}}^o} \right)^2 + \sum_{i,j} \left( \frac{R_{i,j}^m - R_{i,j}^o}{R_{i,j}^o} \right)^2, \quad (6.2)$$

gdzie  $P_{\text{longest}}$  odpowiada najdłuższemu okresowi z wzbudzonych modów, a  $R_{i,j} = P_i/P_j$  to stosunek okresów dla modów rozważanych w danej gwiazdzie i  $P_i < P_j$ ; ‘m’ odpowiada wartościom modelowym, a ‘o’ obserwowanym wartościom okresów.

Dla każdej gwiazdy wybrano ten model, dla którego parametr  $D^2$  był najniższy. Jednak dla części gwiazd nawet modele o najniższej wartości parametru  $D^2$  nie opisywały okresów pulsacji z odpowiednią, satysfakcjonującą dokładnością. Przedstawione jest to na Rys. 6.1, na którym zaprezentowane są obserwowane i modelowe stosunki okresów dla wszystkich gwiazd F+10+20 z próbki wejściowej. Jednej gwiazdzie odpowiadają dwa punkty połączone linią, z czego pełny symbol odpowiada wartościom obserwowanym, a pusty wartościom z modelu minimalizującego parametr  $D^2$ . W przypadku wielu gwiazd wartości obserwowane i teoretyczne stosunków okresów są wyraźnie różne. Konieczne było zatem przyjęcie granicznej wartości parametru  $D^2$ , dla którego dopasowane modele mogą zostać uznane za dobrze opisujące obserwowane gwiazdy. Na podstawie diagramów Petersena dla różnych wartości maksymalnych parametru  $D^2$ , przyjęto granicę o wartości  $2 \cdot 10^{-5}$ . Przyjęcie ustalonych maksymalnych wartości parametru  $D^2$  skutkuje zmniejszeniem się liczby gwiazd z wyznaczonymi parametrami fizycznymi do 71 gwiazd F+10+20, 83 gwiazd F+10+30, 19 gwiazd 10+20+30 oraz 2 gwiazd F+10+20+30, czyli łącznie do 175 gwiazd z 428 gwiazd przyjętych pierwotnie do analizy. Na prawych panelach Rys. 6.1 pokazane są gwiazdy F+10+20 spełniające przyjęte ograniczenie na wartość  $D^2$ . Nałożone ograniczenie skutkuje znaczącym zmniejszeniem się obserwowanego

<sup>1</sup>Rozważano różne definicje parametru, w szczególności tę zastosowaną w pracy Pietrukowicz i in. (2013), minimalizującą wyłącznie różnice okresów. Wszystkie rozważane definicje prowadzą do jakościowo identycznych wyników; ewentualne różnice w wyznaczonych parametrach fizycznych nie przekraczają znacząco wartości wynikających z przyjętego kroku obliczeń.

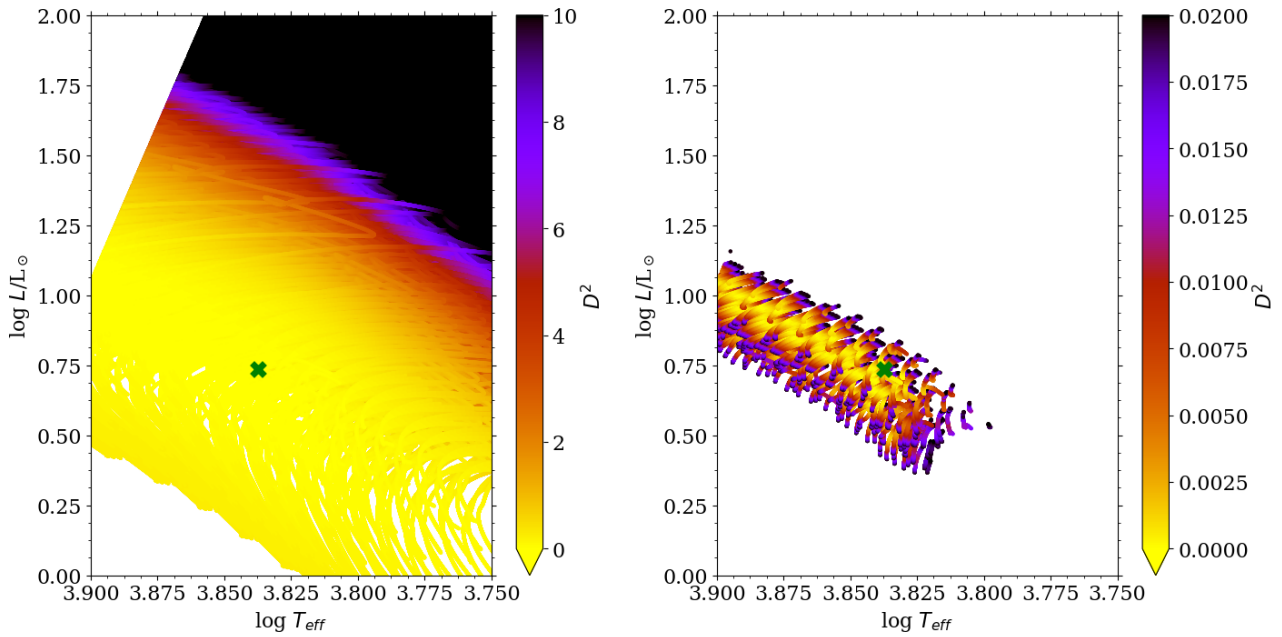


Rysunek 6.1: Porównanie obserwowanych wartości okresów i stosunków okresów z dopasowanymi wartościami przewidzianymi przez modele dla gwiazd F+1O+2O. Dla każdej gwiazdy przedstawiono dwa punkty połączone linią, z czego pełny symbol odpowiada wartościom obserwowanym, a pusty wartościom z modelu minimalizującego parametr  $D^2$ . Panele po lewej stronie przedstawiają wszystkie gwiazdy F+1O+2O. Panele po prawej stronie przedstawiają gwiazdy, dla których parametr  $D^2 < 2 \cdot 10^{-5}$ .

rozrzutu w ramach ciągów na diagramie Petersena. Liczna grupa gwiazd, dla których nie znaleziono satysfakcjonującego dopasowania jest spowodowana kilkoma czynnikami. Przyjmowane kryterium na parametr  $D^2$  jest dość rygorystyczne. Zapewnia ono, że różnice pomiędzy modelowymi i obserwowanymi okresami są nie większe niż rzędu  $10^{-4}$ , a zwykle są rzędu  $10^{-5} - 10^{-6}$ . Zaakceptowanie mniejszej dokładności dopasowań znacznie zwiększyłoby liczbę gwiazd. Kolejne czynniki wpływające na liczbę gwiazd bez dopasowań zostaną przedyskutowane w rozdziale 6.2.

Dla każdej gwiazdy został wybrany jeden model, który najlepiej opisuje obserwowane okresy i stosunki okresów. Jednak istnieje więcej modeli, które dobrze opisują obserwowane wartości okresów, i są scharakteryzowane parametrem  $D^2$  tego samego rzędu wielkości co w najlepszym modelu. Zaprezentowane jest to na Rys. 6.2, na przykładzie gwiazdy F+1O+2O, OGLE-BLG-DSCT-09055, gdzie kolorem zaznaczono wartości parametru  $D^2$ . Model dopasowany do OGLE-BLG-DSCT-09055 jest zaznaczony za pomocą zielonego krzyżyka. Modele o najniższych wartościach parametru  $D^2$  nie grupują się w określonym miejscu tworząc ostre minimum, ale tworzą szerokie minimum z wartościami  $D^2$ , które są tego samego rzędu wielkości. Położenie, na

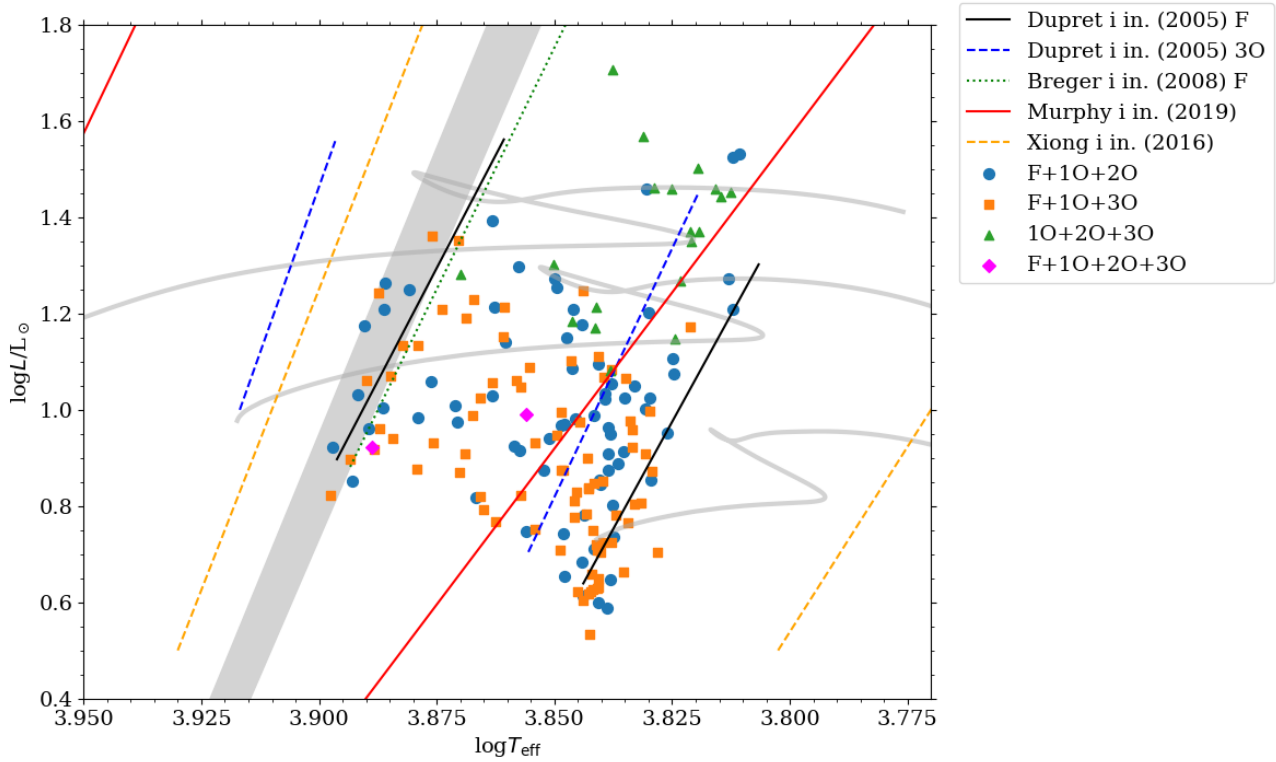




Rysunek 6.2: Diagram HR dla modeli z siatki z ograniczeniem na niebieską granicę pasa niestabilności. Najlepszy model dopasowany do gwiazdy OGLE-BLG-DSCT-09055 został zaznaczony za pomocą zielonego krzyżyka. Wartości parametru  $D^2$  dla każdego modelu zostały przedstawione za pomocą skali kolorów. Lewy panel przedstawia wszystkie modele z siatki (skala kolorów odpowiada mniejszemu zakresowi wartości  $D^2$  w celu lepszej wizualizacji danych), a prawy te, dla których parametr  $D^2 \leq 0.02$ .

diagramie HR, modeli o podobnej jakości dopasowania jest zgodne z nachyleniem linii stałego okresu.

Oszacowanie błędów wyznaczenia parametrów fizycznych jest nietrywialne. Wpływa na nie gęstość siatki, na którą ma wpływ krok parametrów wejściowych oraz parametry numeryczne sterujące krokiem czasowym ewolucji. Wpływ mają także błędy wyznaczenia częstości wynikających z analizy danych fotometrycznych, czy rozkład wartości parametru  $D^2$  dla danej gwiazdy. Dodatkowo, błędy systematyczne mogą się pojawić ze względu na przyjęte założenia fizyczne, czy też ustalenie pewnych parametrów, zarówno dotyczących opisu procesów fizycznych (np. zasięg przestrzeliwania z otoczki) jak i numerycznych (np. rozdzielczość modelu) na stałe wartości niezależne np. od masy modelu czy etapu ewolucji. Oszacowanie błędów nie jest zatem proste. Dla każdej gwiazdy podano rozwiązanie bez określonych błędów wartości fizycznych, odpowiadające minimalnej wartości  $D^2$ . Przedstawione modelowanie nie jest traktowane jednak jako metoda precyzyjnego wyznaczenia parametrów fizycznych konkretnych gwiazd. W tym celu, niezbędne jest dedykowane modelowanie, takie jak np. w pracy [Daszyńska-Daszkiewicz i in. \(2020a\)](#). Przedstawiona metoda jest natomiast bardzo dobra by szybko i w sposób jednorodny oszacować parametry fizyczne dużej liczby gwiazd. Uzyskane wyniki z rozprawy będą doskonałą podstawą do przyszłego precyzyjnego modelowania poszczególnych gwiazd, szczególnie, gdy dostępne będą dla nich dodatkowe ograniczenia obserwacyjne na część parametrów fizycznych. W niniejszej rozprawie, na podstawie wyznaczonych parametrów fizycznych, analizowane będą własności populacji gwiazd jako całości. Do tego celu, błędy wyznaczenia parametrów fizycznych dla konkretnych gwiazd są mniej istotne.



Rysunek 6.3: Diagram HR ilustrujący położenie gwiazd, dla których zostały wyznaczone parametry fizyczne. Za pomocą niebieskich punktów zaznaczono gwiazdy F+1O+2O, za pomocą pomarańczowych kwadratów zaznaczono gwiazdy F+1O+3O. Gwiazdy 1O+2O+3O są zaznaczone za pomocą zielonych trójkątów, natomiast gwiazdy F+1O+2O+3O za pomocą różowych rombów. Szary region odpowiada niebieskiej granicy pasa niestabilności dla zakresu metaliczności przyjętego w siatce modeli. Za pomocą różnych rodzajów linii zaznaczono granice pasa niestabilności na podstawie przewidywań teoretycznych lub analizy obserwacji z literatury, przy czym źródła zaznaczono w legendzie. Szarymi liniami zaznaczono ścieżki ewolucyjne dla trzech modeli o masach 1.5, 1.7 oraz 2.0  $M_{\odot}$ , metaliczności  $[\text{Fe}/\text{H}]=0$  i  $f_{\text{H}} = 0.02$ .

## 6.2 Wyniki

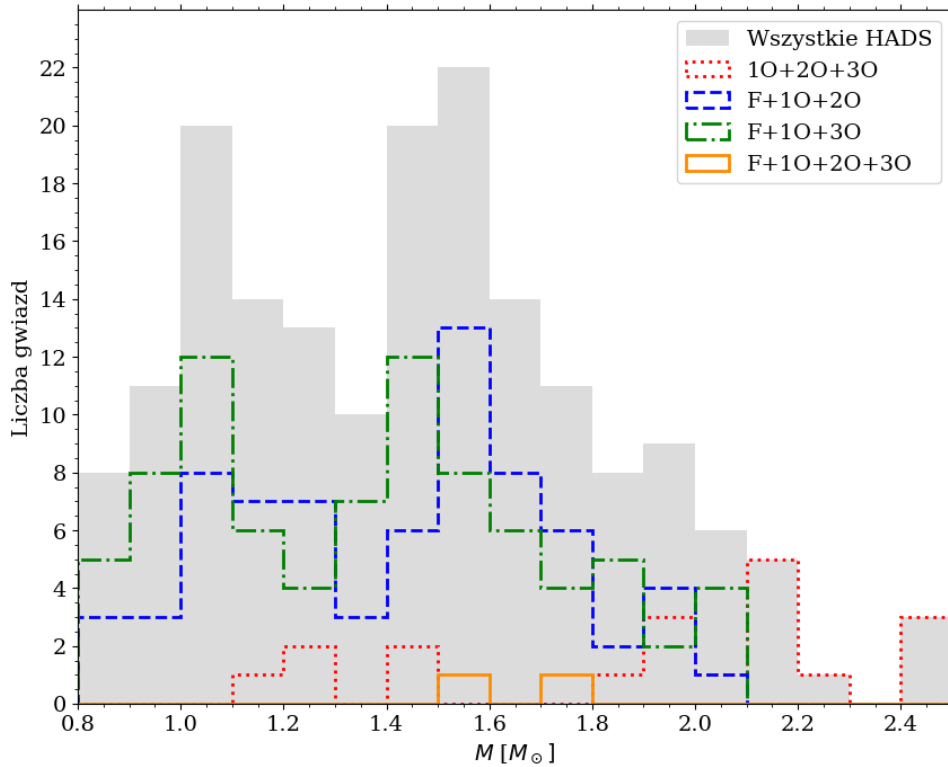
Podstawowe parametry fizyczne zostały wyznaczone dla 175 gwiazd  $\delta$  Scuti. Z tego 71 gwiazd to F+1O+2O, 83 gwiazdy to F+1O+3O, 19 gwiazd to 1O+2O+3O a 2 gwiazdy to F+1O+2O+3O. Wyznaczone parametry to masa, metaliczność, parametr przestrzeliwania z konwektywnego jądra, jasność, temperatura efektywna oraz wiek. Wyniki analizy dla wszystkich gwiazd zebrane są w załączniku w Tab. B.1. Poza parametrami fizycznymi, w ostatniej kolumnie przedstawiono status ewolucyjny.

Dla pozostałych gwiazd nie udało się dopasować modelu, który opisywałby obserwowane okresy i stosunki okresów w wystarczająco dokładny sposób. Mogło na to wpłynąć kilka czynników. Kandydatki wybrane na wielomodalne radialne gwiazdy HADS mogły zostać błędnie zidentyfikowane. Na przykład, w badanej próbie kandydatek, dla części z nich udało się odtworzyć jeden z trzech stosunków okresów. W takich gwiazdach mogą być obecne dwa mody radialne, a trzeci mod jest nieradialny. Jednoczesne występowanie modów nieradialnych i radialnych w gwiazdach  $\delta$  Scuti jest dosyć często występującą sytuacją. Duży rozrzut wokół średnich wartości stosunków okresów na diagramie Petersena dla kandydatek na pulsacje radialne (patrz Rys. 5.6), również może wynikać z tego, że część sygnałów tworząca stosunki okresów odpo-

wiadających pulsacjom radialnym, może być spowodowana przez mody nieradialne. Gwiazdy, dla których udało się znaleźć dobrze dopasowane modele faktycznie tworzą na diagramie Peter-sena ciągi o znacznie mniejszym rozrzucie. Kolejną możliwością braku dopasowania dla części gwiazd, jest to, że parametry fizyczne mogą być dla nich nietypowe, spoza zakresu uwzględnionego w modelowaniu, np. mogą mieć bardzo niskie wartości metaliczności. Zaniedbanie pewnych procesów fizycznych, np. rotacji, również może uniemożliwić uzyskanie dobrych modeli dla niektórych gwiazd. W przypadku części gwiazd zagęszczenie parametrów siatki mogłoby umożliwić uzyskanie modeli o mniejszej wartości parametru  $D^2$  i tym samym zwiększyć liczbę wymodelowanych gwiazd. Kolejnym czynnikiem, który mógł uniemożliwić dopasowanie niektórych gwiazd jest niepewność związana z położeniem niebieskiej granicy. Określenie położenia niebieskiej granicy klasycznego pasa niestabilności jest niepewne zarówno na gruncie teoretycznym jak i obserwacyjnym. Podczas analizy siatka modeli została ograniczona ze względu na przewidziane położenie niebieskiej granicy, jednak nie można wykluczyć, że część z obserwowanych gwiazd mogłaby być odtworzona za pomocą modeli gorętszych. Należy też pamiętać, że w modelowaniu porównywane są obserwowane okresy z liniowymi okresami. Jednak w przypadku gwiazd  $\delta$  Scuti o relatywnie niskich amplitudach, wpływ efektów nieliniowych na okresy pulsacji może zostać pominięty.

Na diagramie HR (Rys. 6.3) przedstawiono położenie 175 gwiazd  $\delta$  Scuti, dla których wyznaczono parametry fizyczne przedstawione w Tab. B.1. Za pomocą różnych symboli przedstawiono cztery grupy pulsacji wielomodalnych. Szary rejon odpowiada położeniom niebieskiej granicy pasa niestabilności dla zakresu metaliczności przyjętego w siatce modeli. Jest on ograniczeniem nałożonym przed dopasowywaniem modeli do gwiazd. W związku z tym wszystkie modele są położone po chłodniejszej stronie diagramu HR niż niebieska krawędź szarego rejonu. Gwiazdy F+1O+2O i F+1O+3O są rozmieszczone w podobnych zakresach jasności oraz temperatury efektywnej, poza pojedynczymi gwiazdami F+1O+2O o wyższych jasnościach. Relatywnie więcej gwiazd z obu grup jest położonych po czerwonej stronie pasa niestabilności. Jedna gwiazda czteromodalna F+1O+2O+3O znajduje się bliżej niebieskiej granicy pasa niestabilności, a druga znajduje się w obszarze zajmowanym typowo przez gwiazdy F+1O+2O oraz F+1O+3O. Gwiazdy 1O+2O+3O są grupą o najwyższej średniej jasności spośród rozważanych czterech grup.

Położenia modelowanych gwiazd zostały porównane z wyznaczeniami granic pasa niestabilności dla gwiazd  $\delta$  Scuti na podstawie danych z literatury. Zielona kropkowana linia odpowiada niebieskiej granicy wyznaczonej w pracy Breger i in. (2008) na podstawie modeli teoretycznych dla modu fundamentalnego. W pracy założono tą samą metaliczność dla całej siatki modeli, czyli  $X = 0.7$  oraz  $Z = 0.02$ . Breger i in. (2008) również nie mieli możliwości wyznaczenia czerwonej granicy pasa niestabilności. Dupret i in. (2005) wykorzystali opis konwekcji zależny od czasu (*time-dependent convection*; TDC), dzięki czemu wyznaczyli zarówno niebieską jak i czerwoną granicę pasa niestabilności. Są one zaznaczone za pomocą czarnych linii dla modu fundamentalnego, a za pomocą niebieskich przerywanych linii dla trzeciego owertonu. Xiong i in. (2016) również wykorzystał opis konwekcji TDC (stosując nieco inne podejście niż Dupret i in. 2005), dzięki czemu także uzyskał niebieską i czerwoną granicę pasa niestabilności dla modów radialnych niskiego rzędu ( $n = 6$ ), które zostały zaznaczone za pomocą pomarańczowych przerywanych linii. Obserwacyjnie granice pasa niestabilności zostały wyznaczone przez Murphy i in. (2019). Granice te zostały zaznaczone za pomocą czerwonych linii. Na Rys. 6.3 widać, że położenie przewidzianych teoretycznie oraz wyznaczonych obserwacyjnie granic pasa niestabilności dla gwiazd  $\delta$  Scuti różni się znacząco. Do wyznaczenia granic pasa niestabilności przez Murphy i in. (2019) wykorzystano wszystkie gwiazdy  $\delta$  Scuti obserwowane przez satelitę *Kepler*, w tym pulsujące w modach nieradialnych o niskich amplitudach. Położenie gwiazd pulsujących

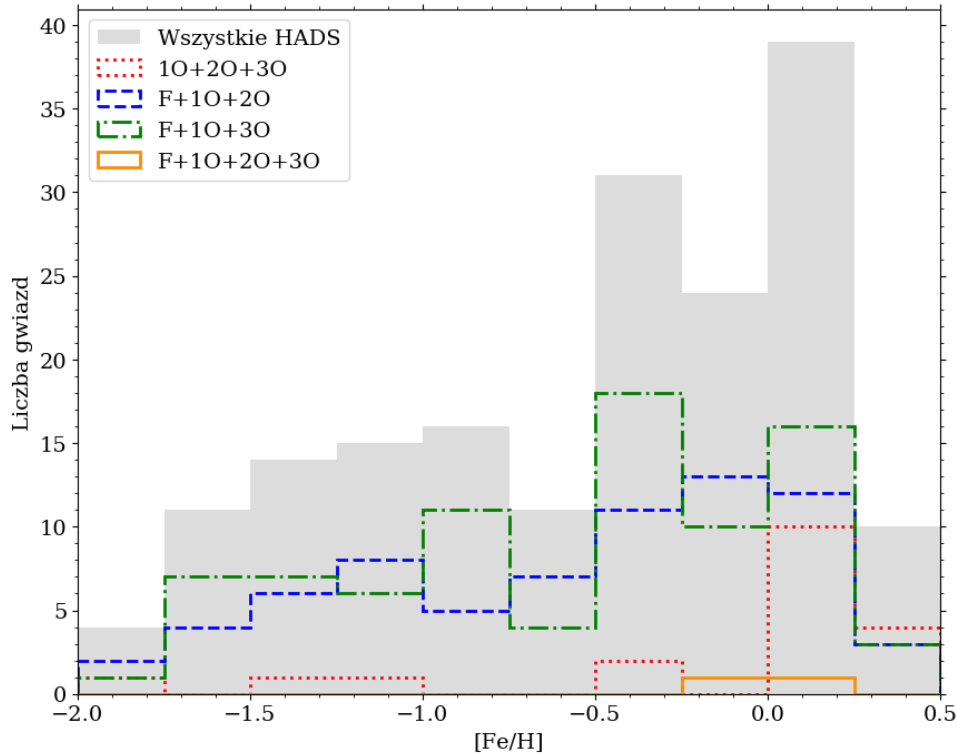


Rysunek 6.4: Rozkład mas dla gwiazd  $\delta$  Scuti z wyznaczonymi parametrami fizycznymi. Za pomocą szarych słupków przedstawiono rozkład dla 175 gwiazd  $\delta$  Scuti, natomiast za pomocą różnych linii zaznaczono rozkłady mas dla poszczególnych typów pulsacji radialnych.

w modach radialnych jest znacząco inne zarówno na podstawie przewidywań teoretycznych jak i obserwacyjnych (patrz rozdział 6.2.2). Różnica pomiędzy granicami otrzymanymi w pracy Murphy i in. (2019) a pozostałymi wynikami jest zatem spowodowana badaniem próbki gwiazd  $\delta$  Scuti o innej charakterystyce pulsacji. Różnice w położeniach granic pasa niestabilności wyznaczonych teoretycznie dla pulsacji w modach radialnych także są znaczące, co pokazuje, że określenie granic jest nietrywialne i niepewne także na gruncie teoretycznym.

Na Rys. 6.4 przedstawiono rozkład mas dla wszystkich gwiazd z Tab. B.1, z uwzględnieniem podziału na poszczególne typy pulsacji wielomodalnych. Dla dwóch gwiazd czteromodalnych wyznaczono masy  $1.55 M_{\odot}$  i  $1.70 M_{\odot}$ , które znajdują się w środku przedziału mas. Gwiazdy trójmodalne pokrywają cały dostępny przedział mas. W rozkładzie mas dla najliczniejszych grup gwiazd, F+1O+2O oraz F+1O+3O, a także w rozkładzie mas dla całej próbki widać dwa maksima. Pierwsze dla mas o wartościach około  $1.1 M_{\odot}$ , a drugie około  $1.5 M_{\odot}$ . Gwiazdy ze wzbudzonym modem fundamentalnym, nie przekraczają masy  $2.1 M_{\odot}$ . W grupie gwiazd 1O+2O+3O nie obserwuje się niższych mas niż  $1.1 M_{\odot}$ . Te gwiazdy osiągają również najwyższe masy sięgające wartości  $2.5 M_{\odot}$ . Jest to zgodne z ich pozycją (wysoka jasność) na diagramie HR (Rys. 6.3).

Na Rys. 6.5 przedstawiono rozkład metaliczności dla całej próbki oraz z podziałem na poszczególne typy pulsacji. Gwiazdy pokrywają cały dostępny przedział metaliczności z siatki, od  $[\text{Fe}/\text{H}] = -2$ . do  $[\text{Fe}/\text{H}] = +0.5$ . Obie grupy, F+1O+2O oraz F+1O+3O, pokrywają także cały zakres metaliczności, przy czym liczniejsze są gwiazdy o metalicznościach powyżej  $-0.5$ . Gwiazdy czteromodalne mają metaliczności  $[\text{Fe}/\text{H}] = -0.25$  oraz  $[\text{Fe}/\text{H}] = 0.0$ . Tym samym znajdują się w okolicy maksimum rozkładu. Gwiazdy 1O+2O+3O są najliczniejsze dla metaliczności wyższych od słonecznej. Jedynie pojedyncze obiekty tego typu mają niskie metaliczności.



Rysunek 6.5: Rozkład metaliczności dla gwiazd  $\delta$  Scuti z wyznaczonymi parametrami fizycznymi. Za pomocą szarych słupków przedstawiono rozkład dla 175 gwiazd  $\delta$  Scuti, natomiast za pomocą różnych linii zaznaczono rozkłady metaliczności dla poszczególnych typów pulsacji radialnych.

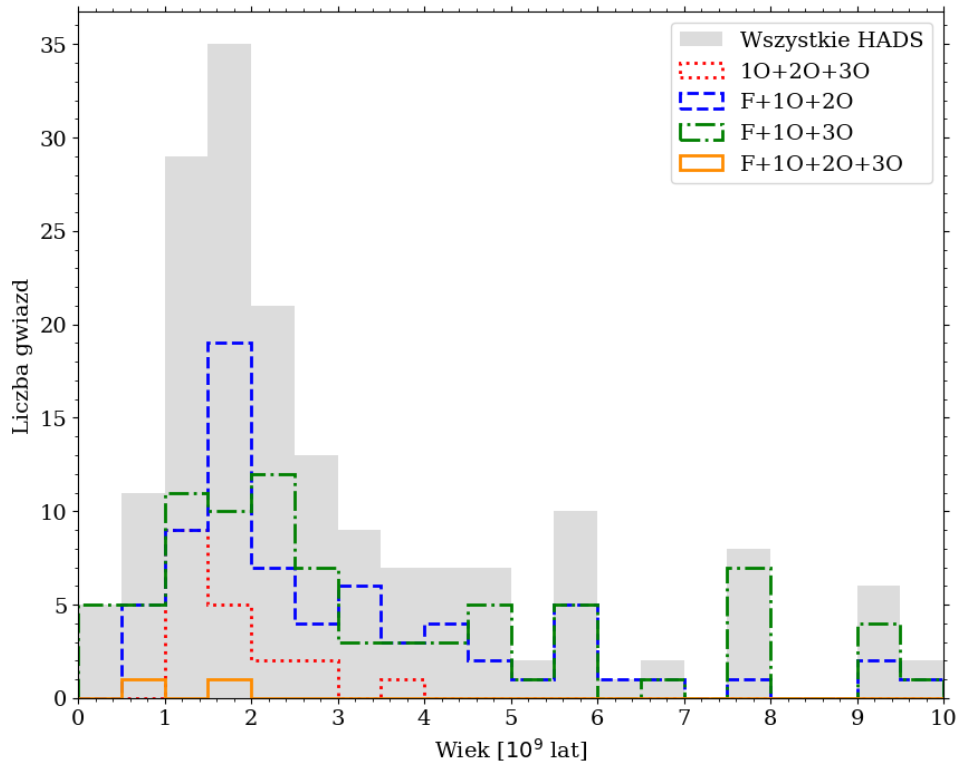
Na Rys. 6.6 przedstawiono rozkład wieku gwiazd z całej próbki z podziałem na poszczególne typy. Większość gwiazd jest młodsza niż  $4 \cdot 10^9$  lat. Mediana wartości wieku dla całej próbki wynosi  $2.1 \cdot 10^9$  lat. Rozkład osiąga maksimum dla wartości około  $1.5 \cdot 10^9$ . Starsze niż  $4 \cdot 10^9$  lat są jedynie gwiazdy F+1O+2O oraz F+1O+3O. Najwyższy wiek w próbce, wynoszący  $9.55 \cdot 10^9$  lat, osiąga gwiazda F+1O+3O.

Na Rys. 6.7 przedstawiono zależność metaliczności od masy gwiazdy dla wszystkich 175 gwiazd HADS. Kolorem zaznaczono wiek gwiazdy. Wyraźnie widać zależność między wiekiem a masą i metalicznością. Najstarsze gwiazdy są małowasywne oraz o małych metalicznościach. Im młodsze gwiazdy, tym wyższe masy i metaliczności.

Na Rys. 6.8 przedstawiona jest zależność między parametrem przestrzeliwania z konwektywnego jądra a masą gwiazdy dla dopasowanych modeli z obecnym jądrem konwektywnym. Nie widać wyraźnej zależności pomiędzy obiema wartościami, choć w literaturze dyskutowana jest zależność wzrastającego parametru przestrzeliwania z rosnącą masą, dla przedziału mas odpowiadającego pojawieniu się jądra konwektywnego na ciągu głównym (Claret i Torres 2017; Constantino i Baraffe 2018, i referencje tamże). Ograniczenie modelowe na parametr  $f_H$  nie jest jednak silne. Dla wielu gwiazd znajdowane są modele o podobnej wartości parametru dopasowania, ale różnych wartościach parametru  $f_H$ . Jednoznaczne określenie parametru przestrzeliwania wyłącznie na podstawie modelowania stosunków okresów modów radialnych może nie być możliwe bez wykorzystania dodatkowych obserwacji.

Na podstawie centralnej zawartości wodoru w dopasowanym modelu, dla każdej gwiazdy określony został status ewolucyjny. Dla centralnych obfitości wodoru powyżej  $10^{-5}$ , gwiazdę klasyfikowano jako znajdującą się na ciągu głównym (MS), natomiast mniejsza wartość oznacza





Rysunek 6.6: Rozkład wieku dla gwiazd  $\delta$  Scuti z wyznaczonymi parametrami fizycznymi. Za pomocą szarych słupków przedstawiono rozkład dla 175 gwiazd  $\delta$  Scuti, natomiast za pomocą różnych linii zaznaczono rozkłady wieku dla poszczególnych typów pulsacji radialnych.

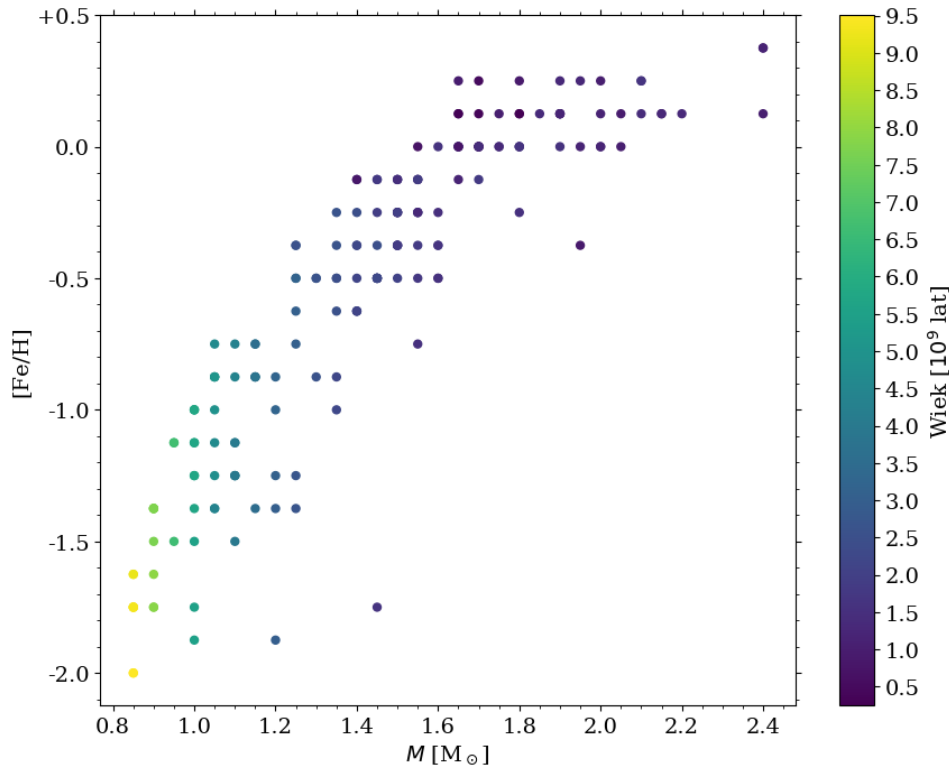
ewolucję po ciągu głównym (PostMS). Wśród badanych gwiazd, 94 odpowiada ewolucji po ciągu głównym, co stanowi 54% wszystkich gwiazd z wyznaczonymi parametrami. Pozostałe 81 gwiazd, czyli 46% gwiazd z wynikowej próbki, znajduje się na ciągu głównym. Obie gwiazdy czteromodalne są sklasyfikowane jako gwiazdy ciągu głównego. Spośród gwiazd F+1O+2O, 38 jest w fazie ewolucji po ciągu głównym, co stanowi 54% gwiazd F+1O+2O. W przypadku gwiazd F+1O+3O po ciągu głównym znajduje się 41 gwiazd, co odpowiada 49% tych gwiazd. Natomiast dla gwiazd 1O+2O+3O 15 z 19 z nich sklasyfikowano jako gwiazdy PostMS, co odpowiada 79%.

Wyższa liczba gwiazd w fazie ewolucji po ciągu głównym była także zaobserwowana przez [Pietrukowicz i in. \(2013\)](#) dla gwiazd HADS z dysku galaktycznego. Na podstawie modelowania, cztery spośród siedmiu gwiazd z dysku zostały sklasyfikowane jako gwiazdy znajdujące się poza ciągiem głównym.

Średnio, modele z całej policzonej siatki znajdują się na ciągu głównym 93% czasu całej policzonej ewolucji (od ZAMS do momentu, gdy  $T_{\text{eff}} = 5500$  K). Jednak gwiazdy o wyższych masach przecinają pas niestabilności dopiero podczas ewolucji po ciągu głównym (tak jest na przykład dla większości modelowanych gwiazd typu 1O+2O+3O, patrz też ścieżki ewolucyjne na Rys. 6.3). Biorąc pod uwagę ścieżki ewolucyjne z nałożonym ograniczeniem na niebieską granicę pasa niestabilności, można stwierdzić, że gwiazdy znajdują się na ciągu głównym średnio jedynie 58% czasu ewolucji od niebieskiej granicy do momentu, gdy  $T_{\text{eff}} = 5500$  K. Ścieżki ewolucyjne dla 908 modeli z rozważanej siatki przecinają pas niestabilności jedynie podczas ewolucji po ciągu głównym. Wszystkie te modele mają masy powyżej  $1.45 M_{\odot}$ .

Wykorzystując położenia i paralaksy wyznaczone przez projekt GAIA ([Gaia Collaboration i in. 2016, 2021](#); [Lindegren i in. 2021](#)) dla gwiazd z wyznaczonymi parametrami fizycznymi, uży-





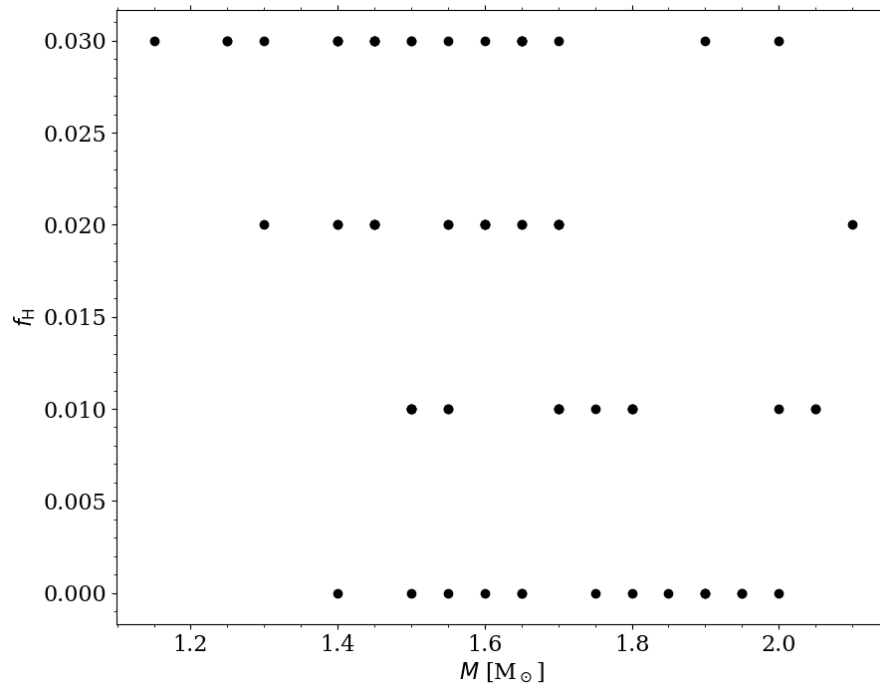
Rysunek 6.7: Zależność między masą i metalicznością dla gwiazd  $\delta$  Scuti z wyznaczonymi parametrami fizycznymi. Kolorem zaznaczony jest wiek.

skalałam ich położenia przestrzenne we współrzędnych galaktocentrycznych – Rys. 6.9. Było to możliwe dla 59 gwiazd z analizowanej próbki. Położenie Słońca przyjęto na  $(X, Y, Z) = (-8, 0, 0)$ . Lewy panel Rys. 6.9 przedstawia widok "z góry" na dysk Galaktyki, a prawy panel przedstawia widok "z boku". Kolorem zaznaczono wyznaczone metaliczności. Błędy wyznaczenia odległości (szare linie na Rys. 6.9) są bardzo duże i utrudniają ilościową analizę. W otoczeniu Słońca, rozważane gwiazdy mają typowo wyższe metaliczności. Poza tym nie znaleziono wyraźnej zależności metaliczności od położenia. Widać także, że większość gwiazd, dla których dostępne są dane GAIA, znajduje się w dysku przed zgrubieniem centralnym Galaktyki. Najprawdopodobniej wynika to z trudności z obliczeniem paralaksy dla bardziej odległych gwiazd.

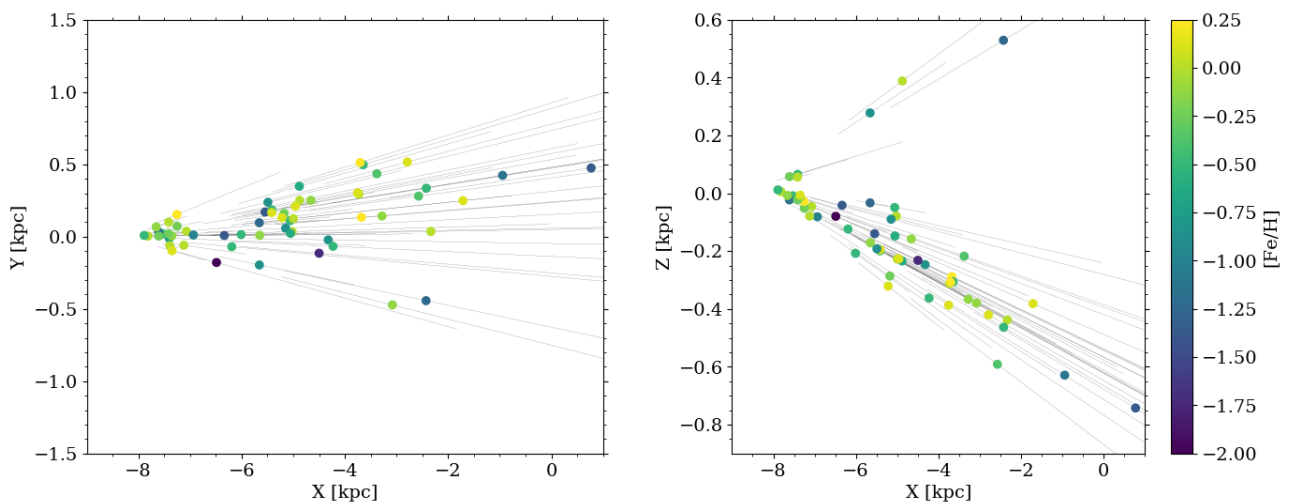
### 6.2.1 Gwiazdy SX Phoenicis

Charakterystyka gwiazd SX Phoenicis (SX Phe) została przedstawiona w rozdziale 1. Spośród 175 gwiazd  $\delta$  Scuti z wyznaczonymi parametrami fizycznymi wybrane zostały kandydatki na gwiazdy SX Phe na podstawie ich wyższego wieku (powyżej  $3 \cdot 10^9$  lat), niższej metaliczności (poniżej  $[Fe/H] = -1.5$ ) oraz niższej masy (poniżej  $1.1 M_{\odot}$ ) niż wartości spodziewane dla gwiazd  $\delta$  Scuti I populacji. 17 gwiazd spełnia wszystkie powyższe kryteria. Wszystkie gwiazdy, poza jedną, są w fazie ewolucyjnej po ciągu głównym, z tego osiem gwiazd to F+10+30 oraz dziewięć to gwiazdy F+10+20.

Pietrukowicz i in. (2013) przeprowadzili modelowanie 7 gwiazd HADS i sklasyfikowali dwie z nich jako gwiazdy SX Phe na podstawie ich niższych metaliczności ( $Z = 0.00044$  oraz  $Z = 0.00046$ ), wyższego wieku ( $5.68 \cdot 10^9$  oraz  $4.36 \cdot 10^9$  lat) i niższych mas ( $M = 0.94 M_{\odot}$  oraz  $1.01 M_{\odot}$ ). Olech i in. (2005) na podstawie obserwacji gwiazd SX Phe w gromadzie  $\omega$  Centauri i modeli teoretycznych uzyskali masy z przedziału  $0.9 - 1.15 M_{\odot}$ . Gwiazda SX Phe, prototyp



Rysunek 6.8: Zależność parametru przestrzeliwania z konwektywnego jądra od masy gwiazdy dla dopasowanych modeli z obecnym jądrem konwektywnym.



Rysunek 6.9: Położenie 59 gwiazd z wyznaczonymi parametrami we współrzędnych galakto-centrycznych. Kolorem zaznaczono metaliczność wyznaczoną na podstawie modeli. Szare linie odpowiadają błędom wyznaczenia odległości.

klasy, była obserwowana przez satelitę TESS. Na podstawie tych obserwacji [Antoci i in. \(2019\)](#) przeprowadzili modelowanie asterosejsmiczne i oszacowali jej masę na  $1.05 M_{\odot}$ . Za pomocą wielobarwnej fotometrii, [Daszyńska-Daszkiewicz i in. \(2020a\)](#) niezależnie potwierdzili identyfikację modów pulsacji w SX Phe jako radialny fundamentalny i pierwszy owerton, a także przeprowadzili modelowanie asterosejsmiczne uzyskując obfitość metali  $Z = 0.002$ , obfitość wodoru z przedziału  $0.67 - 0.70$ , przedział mas  $1.05 - 1.08 M_{\odot}$  oraz wiek w zakresie  $2.8 - 3.07 \cdot 10^9$  lat.

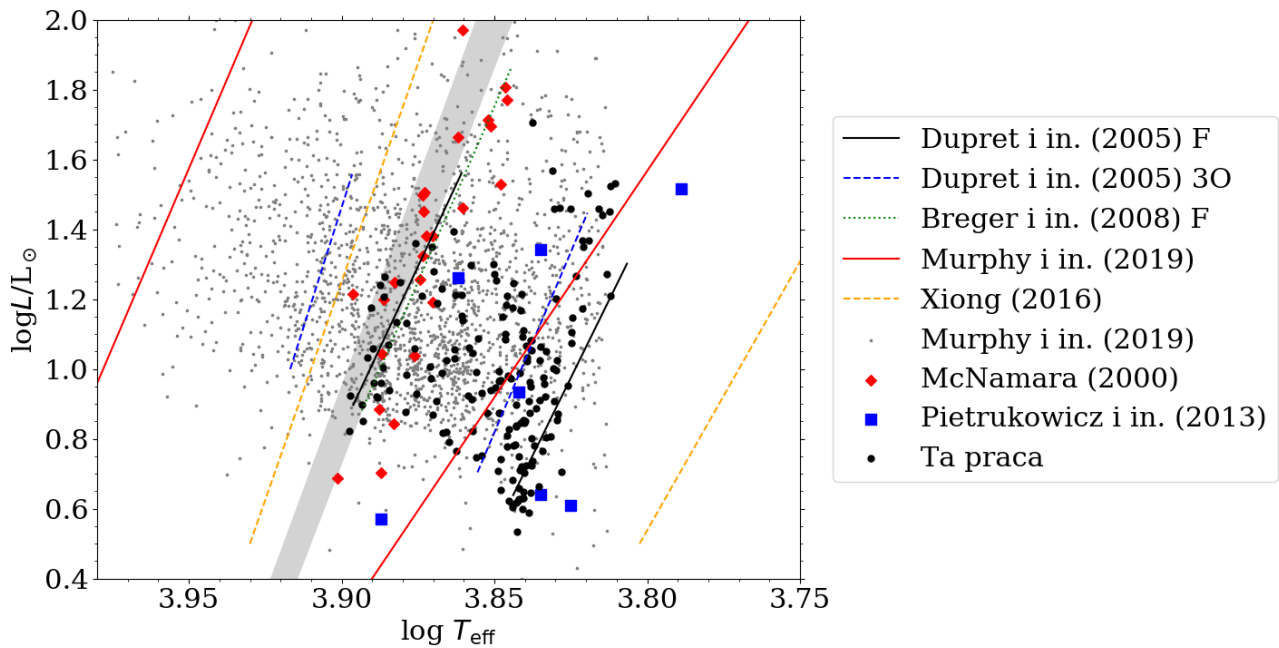
Jak przedyskutowano w pracy [Balona i Nemec \(2012\)](#) ruchy własne także mogą być kryterium ułatwiającym selekcję gwiazd SX Phe. Gwiazdy SX Phe są bardziej zaawansowane ewolucyjnie, są to gwiazdy II populacji. Znajduje się je w grubym dysku i halo Galaktyki. Mają więc typowo wyższe wartości ruchów własnych. Korzystając z danych projektu GAIA przeanalizowałam rozkład ruchów własnych dla 9267 gwiazd  $\delta$  Scuti z pól zgrubienia galaktycznego analizowanych w rozdziale 5 i porównałam je z wartościami ruchów własnych dla 168 gwiazd HADS z wyznaczonymi parametrami fizycznymi, w tym także z 17 kandydatkami na gwiazdy SX Phe. Badając ruchy własne trzeba wziąć pod uwagę, że ruchy własne dla gwiazd o niskiej prędkości tangencjalnej, ale znajdujących się blisko Słońca, są relatywnie duże. Korzystając z wyznaczenia odległości na podstawie danych EDR3 ([Bailer-Jones i in. 2021](#)) otrzymałam prędkości tangencjalne dla części z tych gwiazd. Gwiazdy o zarówno dużych ruchach własnych jak i prędkościach tangencjalnych są zatem dobrymi kandydatkami na SX Phe ([Balona i Nemec 2012](#)). Kandydatki na gwiazdy SX Phe nie odstają w wyraźny sposób od średnich wartości ruchów własnych dla 9267 gwiazd  $\delta$  Scuti. Niestety wyznaczone wartości są obciążone dużymi błędami i jedynie dla jednej gwiazdy, błąd wyznaczenia prędkości tangencjalnej jest mniejszy niż  $20 \text{ km/s}$ . Gwiazda ta, OGLE-BLG-DSCT-07697, nie odstaje od średnich wartości.

### 6.2.2 Porównanie parametrów fizycznych z innymi wyznaczeniami z literatury

[Murphy i in. \(2019\)](#) przeanalizowali dane z satelity *Kepler* dla ponad 15 000 gwiazd o typach widmowych A oraz F i sklasyfikowali ponad 1900 z nich jako gwiazdy  $\delta$  Scuti. Dla tych gwiazd wykorzystali temperatury efektywne z pracy [Mathur i in. \(2017\)](#) oraz obliczyli jasności. Nie sklasyfikowali jednak gwiazd na podtypy. W szczególności nie sklasyfikowali gwiazd  $\delta$  Scuti pulsujących w modach radialnych. Korzystając jednak z całej próbki gwiazd wyznaczyli obserwacyjne granice pasa niestabilności (patrz czerwone ciągłe linie na Rys. 6.3).

[Pietrukowicz i in. \(2013\)](#) przeanalizowali gwiazdy z dysku Galaktyki na podstawie danych OGLE-III i sklasyfikowali 58 gwiazd jako  $\delta$  Scuti. 28 z nich są to gwiazdy jednomodalne. Spośród 30 wielomodalnych gwiazd sklasyfikowali 22 gwiazdy jako pulsujące w dwóch modach radialnych, a 6 gwiazd jako pulsujące w trzech modach radialnych. W jednej gwiazdzie znaleziono cztery mody radialne jednocześnie. Korzystając z modeli teoretycznych [Pietrukowicz i in. \(2013\)](#) wyznaczyli parametry fizyczne (tj. masy, wiek, metaliczności, temperatury efektywne, fazę ewolucyjną) dla gwiazd pulsujących w co najmniej trzech modach radialnych. Na podstawie parametrów fizycznych sklasyfikowali dwie gwiazdy jako SX Phe.

[McNamara \(2000\)](#) przedstawił listę 26 gwiazd typu HADS, dla których otrzymał parametry fizyczne na podstawie fotometrii wielobarwnej w filtrach Stromgrena. Zauważył relację pomiędzy okresem pulsacji a metalicznością (analogicznej zależności nie zaobserwowano na podstawie wyników przedstawionych w tym rozdziale), która wyróżniała krótkookresowe i małometaliczne gwiazdy SX Phe od gwiazd HADS, jednak nie podał wyraźnego kryterium na klasyfikację. Korzystając z bazy danych SIMBAD ([Wenger i in. 2000](#)) sprawdziłam klasyfikację 26 gwiazd z pracy [McNamara \(2000\)](#). Na tej podstawie otrzymałam listę 18 gwiazd HADS, 7 gwiazd SX Phe, a jedna gwiazda została wykluczona z listy ze względu na klasyfikację jej jako gwiazdy

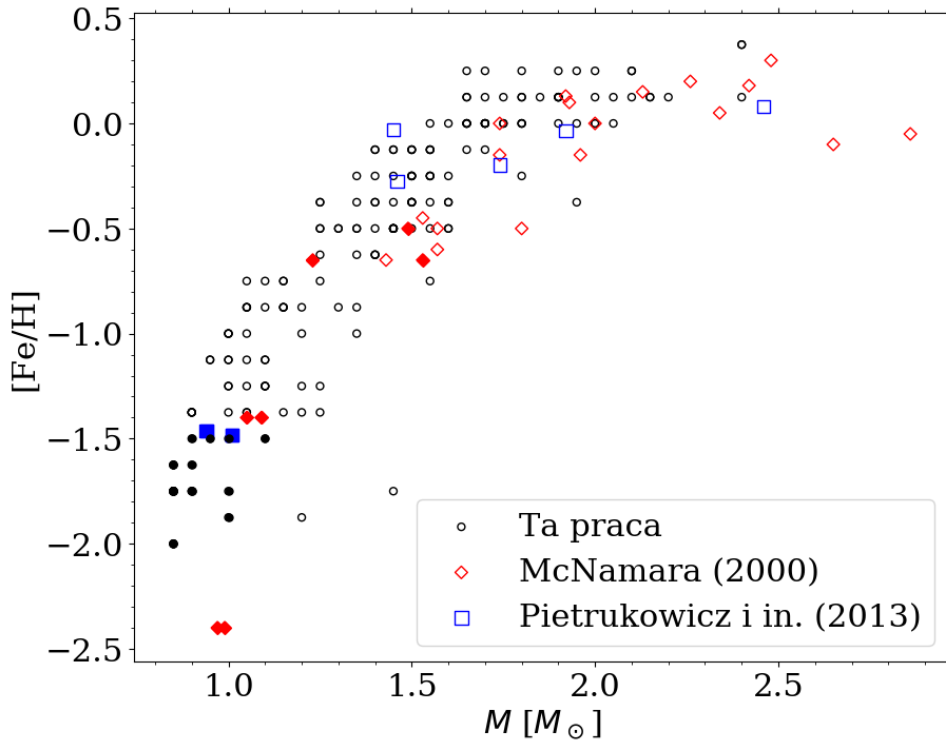


Rysunek 6.10: Diagram HR dla gwiazd z parametrami fizycznymi wyznaczonymi w rozprawie, które zostały zaznaczone za pomocą czarnych punktów. Za pomocą czerwonych rombów przedstawiono gwiazdy HADS z pracy [McNamara \(2000\)](#). Gwiazdy z dysku Galaktycznego ([Pietrukowicz i in. 2013](#)) zostały zaznaczone za pomocą niebieskich kwadratów, a gwiazdy  $\delta$  Scuti z pracy [Murphy i in. \(2019\)](#) za pomocą szarych punktów. Dodatkowo zaznaczono granice pasa niestabilności jak na Rys. 6.3.

RR Lutni ([Hoffman i in. 2009](#)). [McNamara \(2000\)](#) zauważył, że gwiazdy typu HADS zajmują węższy obszar na diagramie HR niż wszystkie gwiazdy  $\delta$  Scuti. To samo zostało zaobserwowane dla gwiazd  $\delta$  Scuti o amplitudach wyższych niż 0.3 mag na podstawie katalogu [Rodríguez i in. \(2000\)](#), jak zaprezentowano na rys. 1 w pracy [Balona \(2016\)](#).

W pracy [Balona \(2016\)](#) przedstawiono także położenie gwiazd  $\delta$  Scuti o wysokich amplitudach na podstawie danych z satelity *Kepler* oraz na podstawie danych naziemnych z przeglądu OGLE dla Wielkiego Obłoku Magellana ([Poleski i in. 2010](#)). Dla obu próbek nie zostało zaobserwowane "węższe" umiejscowienie tych gwiazd na diagramie HR w stosunku do typowych gwiazd  $\delta$  Scuti.

Porównanie położenia gwiazd analizowanych w tej pracy do gwiazd z dysku Galaktyki ([Pietrukowicz i in. 2013](#)), z pracy [McNamara \(2000\)](#) oraz z pracy [Murphy i in. \(2019\)](#) przedstawione jest na Rys. 6.10. Gwiazdy  $\delta$  Scuti z pracy [Murphy i in. \(2019\)](#) pokrywają znacznie szerszy zakres temperatur niż gwiazdy pulsujące w modach radialnych z pozostałych próbek. W szczególności widać, że niebieska granica pasa niestabilności dla pulsacji radialnych (wyznaczona teoretycznie oraz obserwacyjnie) znajduje się w połowie zakresu temperatur obserwowanych dla gwiazd  $\delta$  Scuti. Wobec tego oczywiste jest, że gwiazdy HADS pokrywają węższy zakres temperatur efektywnych niż wszystkie gwiazdy  $\delta$  Scuti. Gwiazdy HADS z pracy [McNamara \(2000\)](#) zajmują wąski przedział temperatur i grupują się w gorącym rejonie pasa niestabilności. Natomiast siedem wielomodalnych gwiazd HADS z dysku galaktycznego ([Pietrukowicz i in. 2013](#)) przyjmuje niższe wartości temperatur efektywnych niż gwiazdy z pracy [McNamara \(2000\)](#) i sięga znacznie niższych wartości temperatur odpowiadających czerwonej granicy z pracy [Dupret i in. \(2005\)](#). Wyniki z tych dwóch prac są więc rozbieżne. Gwiazdy HADS analizowane w niniejszej pracy pokrywają jednak cały ten obszar. Gwiazdy o najwyższych temperaturach efektywnych



Rysunek 6.11: Zależność między masą a metalicznością dla gwiazd z wyznaczonymi parametrami w niniejszej pracy (czarne kółka). Gwiazdy z dysku Galaktycznego (Pietrukowicz i in. 2013) zostały zaznaczone za pomocą niebieskich kwadratów, natomiast gwiazdy HADS z pracy McNamara (2000) za pomocą czerwonych rombów. Pełne symbole oznaczają gwiazdy SX Phe, a puste gwiazdy HADS.

pokrywają się z próbką gwiazd z pracy McNamara (2000), natomiast gwiazdy o niższych temperaturach pokrywają się z grupą gwiazd z pracy Pietrukowicz i in. (2013). Wszystkie rozważane cztery grupy gwiazd  $\delta$  Scuti pokrywają podobny zakres w jasności.

Na Rys. 6.11 przedstawiona jest zależność masy i metaliczności dla gwiazd z niniejszej pracy, a także dla gwiazd z pracy McNamara (2000) oraz z pracy Pietrukowicz i in. (2013). Na rysunku rozróżniono gwiazdy HADS od gwiazd SX Phe, które zostały przedstawione za pomocą wypełnionych symboli. Zależność masy i metaliczności jest bardzo podobna dla wszystkich trzech próbek. Metaliczność wyraźnie rośnie wraz ze wzrostem masy. Powyżej masy  $2 M_{\odot}$  metaliczność gwiazd jest bliska słonecznej. Zakresy parametrów gwiazd z poszczególnych grup różnią się. Dwie gwiazdy z pracy McNamara (2000) mają bardzo niskie metaliczności,  $[Fe/H] = -2.40$ . Tak niskich metaliczności nie uwzględniono w policzonej siatce modeli. Również gwiazdy z dysku nie osiągają tak niskich metaliczności. Obie gwiazdy o niskich metalicznościach z pracy McNamara (2000), a także dwie gwiazdy o metalicznościach około  $[Fe/H] = -1.50$  oraz trzy gwiazdy o metalicznościach około  $[Fe/H] = -0.5$  są sklasyfikowane jako gwiazdy SX Phe. Obie gwiazdy o najniższych metalicznościach z próbki z dysku także są sklasyfikowane jako SX Phe. Pozostałe gwiazdy z dysku mają metaliczności powyżej  $[Fe/H] = -0.5$ . W próbce gwiazd z niniejszej analizy obserwuje się ciągły rozkład gwiazd od metaliczności bliskich słonecznym do niskich.

Dwie gwiazdy z pracy McNamara (2000) mają wyższe masy niż pozostałe gwiazdy z trzech próbek ( $M > 2.5 M_{\odot}$ ). Tak wysokie masy również nie zostały uwzględnione w siatce modeli w tej pracy. Gwiazdy z dysku również nie osiągają tak wysokich wartości mas. Najniższe masy

osiągane przez gwiazdy z poszczególnych próbek to około  $1 M_{\odot}$  dla gwiazd z dysku oraz dla gwiazd z pracy [McNamara \(2000\)](#), natomiast dla gwiazd z tej rozprawy są to wartości  $0.8 M_{\odot}$ .



## Podsumowanie

Celem rozprawy było badanie gwiazd klasycznego pasa niestabilności pod kątem ich astero-sejsmicznego modelowania. W szczególności zbadano gwiazdy RR Lutni oraz Cefeidy klasyczne, a także pulsujące w modach radialnych gwiazdy typu  $\delta$  Scuti. Gwiazdy te zostały zbadane zarówno na gruncie obserwacyjnym jak i teoretycznym.

Gwiazdy RR Lutni oraz Cefeidy klasyczne są niezwykle istotne w astrofizyce, ze względu na to, że służą do wyznaczania odległości we Wszechświecie, a także pozwalają na badania struktury, ewolucji i populacji w galaktykach i systemach gwiazdowych. Gwiazdy te jednak nie były do tej pory, poza pojedynczymi wyjątkami (Moskalik i Dziembowski 2005), przedmiotem badań astero-sejsmicznych. Jest tak, ponieważ pulsują w jednym lub dwóch, rzadziej trzech modach radialnych jednocześnie. Wobec tego, kiedy odkryto dodatkowe sygnały w gwiazdach RR Lutni i Cefeidach klasycznych (np. Gruberbauer i in. 2007; Netzel i in. 2015b) i została zaproponowana ich identyfikacja (Dziembowski 2016), po raz pierwszy pojawiła się możliwość, żeby zbadać statystycznie istotną próbkę tych gwiazd metodami astrosejsmologii.

W rozdziale 2 przeprowadziłam kompleksową analizę danych fotometrycznych dla gwiazd RR Lutni pulsujących w radialnym pierwszym owertonie obserwowanych w polach zgrubienia centralnego Galaktyki przez projekt OGLE. Głównym celem poszukiwań była selekcja gwiazd z charakterystycznym dodatkowym sygnałem, który tworzy stosunek okresów z modem pierwszym owertonowym z przedziału 0.6 – 0.65 (gwiazdy RR<sub>0.61</sub>). Analiza fotometrii z projektu OGLE pozwoliła mi na sklasyfikowanie niemal tysiąca gwiazd z tym dodatkowym sygnałem. Otrzymana częstość występowania dodatkowego modu to 8.3%. Znalezione przeze mnie gwiazdy stanowią 95% wszystkich znanych obecnie gwiazd RR<sub>0.61</sub>. Dzięki tej licznej próbce gwiazd, mogłam zbadać własności dodatkowej okresowości w gwiazdach RR Lutni, a także możliwe było sprawdzenie na gruncie obserwacyjnym przewidywań teorii z pracy Dziembowski (2016).

Model zaproponowany w pracy Dziembowski (2016) tłumaczy naturę sygnałów w gwiazdach RR<sub>0.61</sub> za pomocą dodatkowych modów nieradialnych o stopniach  $\ell = 8, 9$ . Obserwowane sygnały,  $f_x$ , tworzące stosunek okresów o wartościach z przedziału 0.6 – 0.65 odpowiadają harmonikom zaproponowanych modów nieradialnych. Z powodu efektu uśredniania geometrycznego, często harmonika tych modów ma wyższą amplitudę, jednak sam mod nieradialny o częstości oznaczanej w rozdziale 2 jako  $0.5f_x$ , także może być wykrywany w danych. Ze względu na efekt uśredniania, łatwiej o detekcję modu nieradialnego o stopniu  $\ell = 8$ , niż o stopniu  $\ell = 9$ . Zaproponowany model przewiduje także, że środkowy ciąg obserwowany na diagramie Petersena (patrz Rys. 2.9) odpowiada częstości kombinacyjnej  $f_8 + f_9$ . Dzięki analizie gwiazd RRc zyskałam argumenty na poparcie tez z pracy Dziembowski (2016). Są one przedstawione poniżej:

- Większość wykrytych sygnałów o częstościach  $0.5f_x$  odpowiada ciągowi górnemu, który z kolei odpowiada harmonice modu nieradialnego o stopniu  $\ell = 8$  (patrz Rys. 2.15).

Potwierdza to, że źródłem dwóch ciągów na diagramie Petersena jest wzbudzenie modów nieradialnych o różnym  $\ell$ , których amplitudy uśredniane są w różnym stopniu.

- Na licznej próbie gwiazd pokazałam, że sygnał uważany za subharmonikę dodatkowego sygnału, nie jest sygnałem koherentnym, a jego zmienność jest większa od zmienności dodatkowego sygnału, co jest zgodne z przewidywaniami w zaproponowanym modelu.
- Wyselekcjonowałam grupę gwiazd, w których widoczny jest jedynie sygnał odpowiadający bezpośrednio modom nieradialnym (patrz Rys. 2.15). Podczas wcześniejszych analiz sygnały tworzące stosunek okresów  $\sim 0.61$  oraz subharmoniki tych sygnałów występowały jednocześnie. Gwiazdy, w których widać jedynie sygnał odpowiadający w ramach modelu modom nieradialnym, są zatem bardzo interesujące – wskazują, że pierwotnym źródłem zmienności jest właśnie postulowany w modelu mod nieradialny.
- Znalazłam 34 gwiazdy z obserwowanymi sygnałami należącymi do trzech ciągów na diagramie Petersena. Na ich podstawie pokazałam, że sygnał odpowiadający środkowemu ciągowi ma częstość zgodną ze średnią arytmetyczną częstości sygnałów odpowiadających skrajnym ciągom (uwzględniając poszerzenie sygnałów wynikające z ich zmienności, patrz Rys. 2.17). Ta obserwacja jest zgodna zatem z przewidywaniem modelu Dziembowskiego, w którym sygnał odpowiadający środkowemu ciągowi jest wynikiem liniowej kombinacji częstości dwóch modów nieradialnych.

Pełna analiza zmienności w gwiazdach RR Lutni pozwoliła na zwiększenie liczby znanych gwiazd dwumodalnych RR Lutni,  $RR_{0.68}$ . W tych gwiazdach dominującym modem pulsacji jest pierwszy owerton, a obserwowany dodatkowy sygnał ma okres od niego dłuższy i tworzy charakterystyczny stosunek okresów wynoszący około 0.686. Są to interesujące gwiazdy, ponieważ obserwowany stosunek okresów jest niższy niż w gwiazdach RRd, co wskazuje, że dodatkowy sygnał ma częstość niższą niż częstość modu fundamentalnego (który nie jest wykryty w tych gwiazdach). Znalazłam 147 gwiazd  $RR_{0.68}$ , z czego 128 to nowe detekcje w stosunku do wyników wcześniejszych prac [Netzel i in. \(2015a\)](#) i [Netzel i Smolec \(2016\)](#). Nowoodkryte gwiazdy  $RR_{0.68}$ , stanowią 87% wszystkich znanych gwiazd z tej grupy. Dzięki tak dużej liczbie znanych gwiazd  $RR_{0.68}$  możliwe było zbadanie pełnej charakterystyki grupy. Natura dodatkowych okresowości w tych gwiazdach pozostaje niewyjaśniona. Na podstawie analizy przedstawionej w rozprawie udało mi się znaleźć interesujące obiekty, takie jak trzy gwiazdy RR Lutni należące jednocześnie do grupy  $RR_{0.61}$  i  $RR_{0.68}$ . Do tej pory jedynie jeden taki obiekt został zidentyfikowany (gwiazda KIC 9453114). Te gwiazdy są niezwykle istotne, by zrozumieć naturę dodatkowych sygnałów – ewentualny model musi być zgodny z wyjaśnieniem zaproponowanym dla grupy  $RR_{0.61}$ . Nie jest tak w przypadku jedyne go jak dotąd modelu zaproponowanego, by wyjaśnić naturę grupy  $RR_{0.68}$  ([Dziembowski 2016](#)), zakładającego, że w istocie są to małowymasywne (masa rzędu  $0.3 M_{\odot}$ ) produkty ewolucji w układzie podwójnym, jedynie przypominające gwiazdy RR Lutni. Znaczna liczba znalezionych gwiazd  $RR_{0.68}$  i zbadanie ich własności jest doskonałym punktem startowym do dalszego poszukiwania możliwego wyjaśnienia natury obserwowanych sygnałów.

W Cefeidach klasycznych obserwowane są dodatkowe okresowości analogicznie do tych badanych w gwiazdach RR Lutni. Celem badań przedstawionych w rozdziale 3 było odpowiedzenie na pytanie, czy istnieje możliwość ich detekcji na podstawie analizy zmienności linii widmowych. Bezpośrednia detekcja sygnałów w danych spektroskopowych jest bowiem pierwszym krokiem umożliwiającym zastosowanie metody identyfikacji spektroskopowej w celu potwierdzenia lub obalenia aktualnie przyjętego wytłumaczenia natury modów w gwiazdach  $RR_{0.61}$  oraz  $Cep_{0.61}$ . Przeprowadziłam symulacje syntetycznych profili linii widmowych dla Cefeidy klasycznej. Zbadałam możliwości detekcji w zależności od parametrów modu, takich jak stopień i rząd azymu-

talny, czy od parametrów takich jak kąt inklinacji. Przeprowadziłam symulacje uwzględniające szum obserwacyjny w widmach, a także realistyczne próbkowanie danych, w celu określenia, czy jest możliwe wykonanie obserwacji o dokładności wystarczającej na detekcję tego modu. Pokazałam, że detekcja może być możliwa. Jest to jednak zadanie nietrywialne, wymagające wykorzystania dużej liczby widm o wysokiej rozdzielczości oraz użycia technik zwiększających stosunek sygnału do szumu.

W rozdziale 2 wyselekcjonowałam gwiazdy  $RR_{0.61}$ . W szczególności znalazłam gwiazdy trójmodalne  $RRc$  z dwoma modami nieradialnymi oraz  $RRd$  z co najmniej jednym modem nieradialnym. Zakładając poprawność modelu Dziembowskiego, za którą przemawiają wyniki analizy obserwacji z rozdziału 2, przeprowadziłam modelowanie trójmodalnych gwiazd  $RR_{0.61}$ . Jest ono tematem rozdziału 4. Dodatkowo przyjąłam do modelowania kilka trójmodalnych gwiazd  $RR_{0.61}$  na podstawie przeglądu literatury. Łączna próbka modelowanych gwiazd liczyła 45 gwiazd  $RRc$  oraz 14 gwiazd  $RRd$ . Modelowanie zostało przeprowadzone przy pomocy otoczkowego kodu pulsacyjnego i polegało na policzeniu siatki modeli gwiazd  $RR$  Lutni, a następnie na dopasowaniu ich do obserwowanych gwiazd przez porównanie okresów pulsacji. Już samo policzenie siatki modeli pozwoliło na wyjaśnienie obserwacji wykonanych w gromadach M3 (Jurcsik i in. 2015) i NGC 6362 (Smolec i in. 2017). W gromadach tych zauważono, że gwiazdy  $RR_{0.61}$  nie są znajdowane w gorącej części pasa niestabilności, blisko niebieskiej granicy pasa na diagramach barwa – jasność. Na podstawie modeli teoretycznych pokazałam, że w pobliżu niebieskiej granicy klasycznego pasa niestabilności dla radialnego pierwszego owertonu mody nieradialne o stopniu 8 i 9 są stabilne. Stanowi to kolejny argument za słusznością modelu Dziembowskiego.

Udało mi się satysfakcjonująco odtworzyć obserwowane okresy, a co za tym idzie otrzymać parametry fizyczne dla 42 gwiazd  $RRc$  i 11 gwiazd  $RRd$ . Otrzymane parametry fizyczne to masa, temperatura efektywna, jasność i metaliczność. W przypadku badanych gwiazd  $RR_{0.61}$  szczególnie oszacowania mas są ważne, ponieważ do tej pory nie wykryto gwiazdy  $RR$  Lutni w zaćmieniowym układzie podwójnym, a zatem nie było możliwości bezpośredniego określenia masy na podstawie obserwacji. Dla gwiazd  $RRc$  z dwoma modami nieradialnymi ze zgrubienia centralnego Galaktyki oraz dla gwiazd  $RRd$  z modem nieradialnym o stopniu  $\ell = 8$  otrzymane masy są z przedziału  $0.55 - 0.8 M_{\odot}$ . Jest to zgodne ze spodziewanym zakresem mas dla gwiazd  $RR$  Lutni.

Z kolei część gwiazd  $RRc$  z misji K2, a także większość gwiazd  $RRd$  z modem nieradialnym o stopniu  $\ell = 9$ , mają wyznaczone wyższe masy o wartościach z przedziału  $0.8 - 0.9 M_{\odot}$ , które to wykraczają poza przedział spodziewanych mas gwiazd  $RR$  Lutni. Najistotniejszymi obserwowanymi różnicami pomiędzy gwiazdami o wyznaczonych typowych masach, a gwiazdami o wysokich masach jest okres pulsacji, który jest dłuższy dla bardziej masywnych gwiazd, oraz stosunek okresów, który jest dla nich typowo wyższy. W przypadku gwiazd  $RRc$  z misji K2, dla których dysponujemy jedynie krótkimi segmentami danych obserwacyjnych, istnieje dodatkowa niepewność w modelowaniu, związana z trudnością określenia reprezentatywnej częstości modów nieradialnych. Dodatkowo, te gwiazdy wyróżniają się swoim innym położeniem na diagramie Petersena w stosunku do gwiazd ze zgrubienia centralnego Galaktyki – mogą one należeć do innej populacji gwiazd o nieco innych parametrach fizycznych. W przypadku gwiazd  $RRd$  z modem o stopniu 9, niepewności mogą wynikać także z nieznanego wpływu sprzężeń nieliniowych pomiędzy modem fundamentalnym a modem nieradialnym, które mogą wpływać na obserwowane wartości częstości. Przede wszystkim jednak, nietypowo wysokie masy zostały wyznaczone dla gwiazd o dłuższych okresach pulsacji. Problem ten pojawia się także w literaturze, mianowicie odtworzenie stosunków okresów pulsacji F+1O w gwiazdach  $RRd$  o długich okresach pulsacji wymaga nietypowych parametrów.

Pierwsze podejście do modelowania gwiazd RR Lutni pulsujących jednocześnie w modach radialnych i nieradialnych przebiegło pomyślnie. Dla większości gwiazd udało się otrzymać parametry fizyczne o wartościach typowych dla gwiazd RR Lutni. Otrzymany rozkład metaliczności jest zgodny ze spektroskopowymi wyznaczeniami metaliczności dla gwiazd RRc. Jednak porównanie otrzymanych mas z masami przewidzianymi na podstawie teorii ewolucji prowadzi do rozbieżności. Rozbieżność ta będzie mogła być zbadana jedynie przy wykorzystaniu obserwacji nakładających dodatkowe ograniczenia, np. na temperaturę efektywną czy metaliczność. Dalszym możliwym kierunkiem badań jest ponowne modelowanie gwiazd RR<sub>0.61</sub> z wykorzystaniem siatki o znacznie większej gęstości modeli, co poprawi oszacowania parametrów fizycznych. Otrzymane już parametry stanowią dobrą podstawę do indywidualnego modelowania gwiazd z wykorzystaniem dodatkowych ograniczeń, jak np. na ich kolor czy metaliczność. Kolejnym kierunkiem badań jest również próba modelowania Cefeid klasycznych z dodatkowymi modami nieradialnymi.

Rozdziały 5 oraz 6 poświęciłam badaniu gwiazd typu HADS. W rozdziale 5 przeanalizowałam największą dostępną próbkę gwiazd  $\delta$  Scuti, która powstała na podstawie danych OGLE dla zgrubienia centralnego Galaktyki (Pietrukowicz i in. 2020). Podstawowym problemem w zastosowaniu gwiazd typu  $\delta$  Scuti pulsujących w licznych modach nieradialnych w badaniach asterosejsmicznych jest trudność w identyfikacji modów pulsacji. Pulsujące radialnie gwiazdy HADS pozwalają na identyfikację modów na podstawie stosunków okresów. Na podstawie stosunków okresów wyselekcjonowałam liczną grupę gwiazd (3083 gwiazd), które są kandydatkami na gwiazdy pulsujące w co najmniej dwóch modach radialnych jednocześnie, a w szczególności wyselekcjonowałam gwiazdy, które pulsują w trzech bądź czterech modach radialnych. Taka liczba wzbudzonych i zidentyfikowanych modów pozwala na uzyskanie dobrych ograniczeń na wartości parametrów fizycznych dzięki modelowaniu asterosejsmicznemu. Sklasyfikowałam 428 gwiazd jako HADS pulsujące w co najmniej trzech modach radialnych. Interesującym wynikiem selekcji gwiazd HADS jest klasyfikacja nowej grupy gwiazd trójmodalnych, które pulsują jednocześnie w modzie fundamentalnym, pierwszym oraz trzecim owertonie, ponieważ brak wzbudzonego drugiego owertonu nie jest prosty do wytłumaczenia. Jest to także najliczniejsza grupa gwiazd wśród badanych trójmodalnych gwiazd HADS. Szczególnie interesująca jest także grupa czternastu gwiazd pulsujących w czterech modach radialnych jednocześnie. Na podstawie analizy krzywych blasku gwiazd dwumodalnych zbadalam, czy jedynie na podstawie kształtu krzywej blasku istnieje możliwość określenia modu pulsacji, jak to ma miejsce dla gwiazd RR Lutni czy Cefeid. W przypadku gwiazd  $\delta$  Scuti kształt krzywej blasku nie pozwala na jednoznaczne określenie dominującego modu pulsacji radialnych.

W rozdziale 6 zajęłam się badaniem największej znanej do tej pory próbki gwiazd sklasyfikowanych w rozdziale 5 jako kandydatki na gwiazdy  $\delta$  Scuti pulsujące w trzech lub czterech modach radialnych jednocześnie. Celem rozdziału 6 było określenie parametrów fizycznych obserwowanej populacji tych gwiazd w zgrubieniu centralnym Galaktyki. Wykorzystałam modele ewolucyjne oraz pulsacyjne, aby odtworzyć obserwowane okresy modów radialnych i odpowiadające im stosunki okresów. Wykorzystałam kod ewolucyjny MESA (Paxton i in. 2011, 2013, 2015, 2018, 2019) oraz warszawski kod pulsacyjny (Dziembowski 1977b). Wykorzystując powyższe kody do badania wielomodalnych gwiazd  $\delta$  Scuti, udało mi się uzyskać oszacowania parametrów fizycznych dla 175 gwiazd  $\delta$  Scuti. Uzyskane parametry to masa, jasność, temperatura efektywna, metaliczność, a także wiek i status ewolucyjny. Wykorzystując znane parametry, wyselekcjonowałam także 17 gwiazd jako kandydatki na gwiazdy typu SX Phoenicis. Jest to pierwsza tak liczna próbka gwiazd  $\delta$  Scuti pulsujących w modach radialnych z określonymi parametrami na podstawie modelowania asterosejsmicznego. Parametry fizyczne gwiazd rozważanych jako cała populacja są zgodne z wynikami dla gwiazd HADS i SX Phe analizowanych

w literaturze. Podczas modelowania nie analizowano każdej gwiazdy indywidualnie, ale wykorzystano przygotowaną siatkę modeli teoretycznych do oszacowania parametrów tych gwiazd jako całej populacji. Wyznaczone parametry stanowią doskonałą bazę do dalszej analizy indywidualnej poszczególnych gwiazd z nałożonymi dodatkowymi ograniczeniami, pochodzącymi np. z obserwacji z misji GAIA.

# Bibliografia

- Aerts, C. 2021, *Reviews of Modern Physics*, 93, 015001
- Aerts, C., Christensen-Dalsgaard, J., i Kurtz, D. W. 2010, *Asteroseismology*
- Aerts, C., de Pauw, M., i Waelkens, C. 1992, *A&A*, 266, 294
- Aerts, C. i Eyer, L. 2000, w *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Nr 210, *Delta Scuti and Related Stars*, edytorzy M. Breger i M. Montgomery, 113
- Aerts, C., Mathis, S., i Rogers, T. M. 2019, *ARA&A*, 57, 35
- Antoci, V., Cunha, M. S., Bowman, D. M., i in. 2019, *MNRAS*, 490, 4040
- Asplund, M., Grevesse, N., Sauval, A. J., i Scott, P. 2009, *ARA&A*, 47, 481
- Bahcall, J. N., Serenelli, A. M., i Basu, S. 2006, *ApJS*, 165, 400
- Bailer-Jones, C. A. L., Rybizki, J., Fouesneau, M., Demleitner, M., i Andrae, R. 2021, *AJ*, 161, 147
- Balona, L. A. 2016, *MNRAS*, 459, 1097
- Balona, L. A. i Nemeč, J. M. 2012, *MNRAS*, 426, 2413
- Baran, A. S., Koen, C., i Pokrzywka, B. 2015, *MNRAS*, 448, L16
- Bellinger, E. P., Kanbur, S. M., Bhardwaj, A., i Marconi, M. 2020, *MNRAS*, 491, 4752
- Benkő, J. M., Kolenberg, K., Szabó, R., i in. 2010, *MNRAS*, 409, 1585
- Benkő, J. M., Sódor, Á., i Pál, A. 2021, *MNRAS*, 500, 2554
- Blažko, S. 1907, *Astronomische Nachrichten*, 175, 325
- Bono, G. i Stellingwerf, R. F. 1994, *ApJS*, 93, 233
- Breger, M. 1972, *ApJ*, 171, 539
- Breger, M. 2000, w *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Nr 210, *Delta Scuti and Related Stars*, edytorzy M. Breger i M. Montgomery, 3
- Breger, M., Lenz, P., i Pamyatnykh, A. A. 2008, *Communications in Asteroseismology*, 157, 56
- Breger, M., Stich, J., Garrido, R., i in. 1993, *A&A*, 271, 482
- Buchler, J. R., Goupil, M. J., i Serre, T. 1995, *A&A*, 296, 405



- Butler, R. P., Bell, R. A., i Hindsley, R. B. 1996, *ApJ*, 461, 362
- Campbell, W. W. i Wright, W. H. 1900, *ApJ*, 12, 254
- Castelli, F. i Kurucz, R. L. 2003, w *Modelling of Stellar Atmospheres*, edytorzy N. Piskunov, W. W. Weiss, i D. F. Gray, Nr 210, A20
- Chadid, M. 2012, *A&A*, 540, A68
- Chadid, M., Kolenberg, K., Aerts, C., i Gillet, D. 1999, *A&A*, 352, 201
- Choi, J., Dotter, A., Conroy, C., i in. 2016, *ApJ*, 823, 102
- Christensen-Dalsgaard, J. 2021, *Living Reviews in Solar Physics*, 18, 2
- Claret, A. 2000, *A&A*, 363, 1081
- Claret, A. i Torres, G. 2017, *ApJ*, 849, 18
- Clementini, G., Gratton, R., Bragaglia, A., i in. 2003, *AJ*, 125, 1309
- Constantino, T. i Baraffe, I. 2018, *A&A*, 618, A177
- Córsico, A. H. 2020, *IAU Symposium*, 357, 93
- Cox, J. P. 1980, *Theory of stellar pulsation*
- Cox, J. P. i Giuli, R. T. 1968, *Principles of stellar structure*
- Daszyńska-Daszkiewicz, J., Dziembowski, W. A., Pamyatnykh, A. A., i Goupil, M. J. 2002, *A&A*, 392, 151
- Daszyńska-Daszkiewicz, J., Pamyatnykh, A. A., Walczak, P., i Szewczuk, W. 2020a, *MNRAS*, 499, 3034
- Daszyńska-Daszkiewicz, J., Walczak, P., Pamyatnykh, A., i Szewczuk, W. 2020b, w *XXXIX Polish Astronomical Society Meeting*, edytorzy K. Małek, M. Polińska, A. Majczyna, G. Stachowski, R. Poleski, Ł. Wyrzykowski, i A. óżańska, Nr 10, 136–141
- De Somma, G., Marconi, M., Molinaro, R., i in. 2020, *ApJS*, 247, 30
- Deeming, T. J. 1975, *Ap&SS*, 36, 137
- Deheuvels, S., Ballot, J., Beck, P. G., i in. 2015a, *A&A*, 580, A96
- Deheuvels, S., Silva Aguirre, V., Cunha, M. S., i in. 2015b, w *European Physical Journal Web of Conferences*, Nr 101, *European Physical Journal Web of Conferences*, 01013
- Deubner, F.-L. i Gough, D. 1984, *ARA&A*, 22, 593
- Díaz-Fraile, D., Rodríguez, E., i Amado, P. J. 2014, *A&A*, 568, A32
- Donati, J. F., Semel, M., Carter, B. D., Rees, D. E., i Collier Cameron, A. 1997, *MNRAS*, 291, 658
- Dotter, A., Chaboyer, B., Jevremović, D., i in. 2008, *ApJS*, 178, 89

- Dupret, M. A., Grigahcène, A., Garrido, R., Gabriel, M., i Scufflaire, R. 2005, *A&A*, 435, 927
- Dziembowski, W. 1977a, *Acta Astron.*, 27, 203
- Dziembowski, W. 1977b, *Acta Astron.*, 27, 95
- Dziembowski, W. A. 2012, *Acta Astron.*, 62, 323
- Dziembowski, W. A. 2016, *Communications of the Konkoly Observatory Hungary*, 105, 23
- Eddington, A. S. 1919, *MNRAS*, 79, 177
- Eggen, O. J. 1956, *PASP*, 68, 238
- Eggleton, P. P. 1971, *MNRAS*, 151, 351
- Epstein, I. 1950, *ApJ*, 112, 6
- Ferguson, J. W., Alexander, D. R., Allard, F., i in. 2005, *ApJ*, 623, 585
- Gaia Collaboration, Brown, A. G. A., Vallenari, A., i in. 2021, *A&A*, 649, A1
- Gaia Collaboration, Prusti, T., de Bruijne, J. H. J., i in. 2016, *A&A*, 595, A1
- Gieren, W., Storm, J., Barnes, Thomas G., I., i in. 2005, *ApJ*, 627, 224
- Gies, D. R. 1991, w *European Southern Observatory Conference and Workshop Proceedings*, Nr 36, *European Southern Observatory Conference and Workshop Proceedings*, 229
- Goodricke, J. 1786, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series I*, 76, 48
- Gruberbauer, M., Kolenberg, K., Rowe, J. F., i in. 2007, *MNRAS*, 379, 1498
- Hajdu, G., Catelan, M., Jurcsik, J., i Thompson, I. B. 2018, w *The RR Lyrae 2017 Conference. Revival of the Classical Pulsators: from Galactic Structure to Stellar Interior Diagnostics*, edytorzy R. Smolec, K. Kinemuchi, i R. I. Anderson, Nr 6, 248–252
- Handler, G. 2009, *MNRAS*, 398, 1339
- Handler, G. 2013, *Asteroseismology*, edytorzy T. D. Oswalt i M. A. Barstow, Nr 4, 207
- Haschke, R., Grebel, E. K., i Duffau, S. 2012a, *AJ*, 144, 106
- Haschke, R., Grebel, E. K., i Duffau, S. 2012b, *AJ*, 144, 107
- Hauschildt, P. H., Allard, F., i Baron, E. 1999a, *ApJ*, 512, 377
- Hauschildt, P. H., Allard, F., Ferguson, J., Baron, E., i Alexander, D. R. 1999b, *ApJ*, 525, 871
- Hekker, S. i Aerts, C. 2010, *A&A*, 515, A43
- Herwig, F. 2000, *A&A*, 360, 952
- Hidalgo, S. L., Pietrinferni, A., Cassisi, S., i in. 2018, *ApJ*, 856, 125
- Hoffman, D. I., Harrison, T. E., i McNamara, B. J. 2009, *AJ*, 138, 466

- Hubble, E. 1929, *Proceedings of the National Academy of Science*, 15, 168
- Iglesias, C. A. i Rogers, F. J. 1996, *ApJ*, 464, 943
- Jacyszyn-Dobrzyniecka, A. M., Skowron, D. M., Mróz, P., i in. 2016, *Acta Astron.*, 66, 149
- Jacyszyn-Dobrzyniecka, A. M., Skowron, D. M., Mróz, P., i in. 2017, *Acta Astron.*, 67, 1
- Jurcsik, J., Smitola, P., Hajdu, G., i in. 2017, *MNRAS*, 468, 1317
- Jurcsik, J., Smitola, P., Hajdu, G., i in. 2015, *ApJS*, 219, 25
- Jurcsik, J., Sódor, Á., Szeidl, B., i in. 2009, *MNRAS*, 400, 1006
- Karczmarek, P., Pietrzyński, G., Górski, M., Gieren, W., i Bersier, D. 2017, *AJ*, 154, 263
- Keller, S. C. 2008, *ApJ*, 677, 483
- Kippenhahn, R. i Weigert, A. 1990, *Stellar Structure and Evolution*
- Kolenberg, K., Aerts, C., Chadid, M., i Gillet, D. 2000, w *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Nr 203, *IAU Colloq. 176: The Impact of Large-Scale Surveys on Pulsating Star Research*, edytorzy L. Szabados i D. Kurtz, 286–290
- Kolenberg, K., Aerts, C., Fokin, A., i in. 2003, w *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Nr 292, *Interplay of Periodic, Cyclic and Stochastic Variability in Selected Areas of the H-R Diagram*, edytorzy C. Sterken, 171
- Kolláth, Z. i Buchler, J. R. 2001, *Double-mode stellar pulsations*, edytorzy M. Takeuti i D. D. Sasselov, Nr 257, 29–60
- Kollmeier, J. A., Szczygieł, D. M., Burns, C. R., i in. 2013, *ApJ*, 775, 57
- Kovacs, G., Buchler, J. R., Marom, A., Iglesias, C. A., i Rogers, F. J. 1992, *A&A*, 259, L46
- Kovacs, K., Buchler, J. R., i Davis, C. G. 1987, *ApJ*, 319, 247
- Kovtyukh, V. V., Andrievsky, S. M., Luck, R. E., i Gorlova, N. I. 2003, *A&A*, 401, 661
- Kraft, R. P., Camp, D. C., Fernie, J. D., Fujita, C., i Hughes, W. T. 1959, *ApJ*, 129, 50
- Kuehn, C. A., Moskalik, P., i Drury, J. A. 2017, w *European Physical Journal Web of Conferences*, Nr 160, *European Physical Journal Web of Conferences*, 04011
- Kurtz, D. W. 1985, *MNRAS*, 213, 773
- Kurtz, D. W., Bowman, D. M., Ebo, S. J., i in. 2016, *MNRAS*, 455, 1237
- Kuschnig, R., Weiss, W. W., Gruber, R., Bely, P. Y., i Jenkner, H. 1997, *A&A*, 328, 544
- Langer, N., El Eid, M. F., i Fricke, K. J. 1985, *A&A*, 145, 179
- Leavitt, H. S. 1908, *Annals of Harvard College Observatory*, 60, 87
- Leavitt, H. S. i Pickering, E. C. 1912, *Harvard College Observatory Circular*, 173, 1

- Ledoux, P. 1951, *ApJ*, 114, 373
- Lee, Y.-H., Kim, S. S., Shin, J., Lee, J., i Jin, H. 2008, *PASJ*, 60, 551
- Lemaître, G. 1927, *Annales de la Sociéte; Scientifique de Bruxelles*, 47, 49
- Lindegren, L., Klioner, S. A., Hernández, J., i in. 2021, *A&A*, 649, A2
- Lovekin, C. C. i Deupree, R. G. 2008, *ApJ*, 679, 1499
- Madore, B. F., Hoffman, D., Freedman, W. L., i in. 2013, *ApJ*, 776, 135
- Mantegazza, L. i Poretti, E. 2002, *A&A*, 396, 911
- Mantegazza, L., Poretti, E., Michel, E., i in. 2012, *A&A*, 542, A24
- Marconi, M., Coppola, G., Bono, G., i in. 2015, *ApJ*, 808, 50
- Marsakov, V. A., Gozha, M. L., i Koval', V. V. 2019, *Astronomy Reports*, 63, 203
- Mathur, S., Huber, D., Batalha, N. M., i in. 2017, *ApJS*, 229, 30
- McNamara, D. H. 2000, w *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Nr 210, *Delta Scuti and Related Stars*, edytorzy M. Breger i M. Montgomery, 373
- Molnár, L., Szabó, R., Moskalik, P. A., i in. 2015, *MNRAS*, 452, 4283
- Moravveji, E. 2015, w *EAS Publications Series*, Nr 71-72, *EAS Publications Series*, 317–320
- Moskalik, P. i Dziembowski, W. A. 2005, *A&A*, 434, 1077
- Moskalik, P. i Kołaczkowski, Z. 2008, *Communications in Asteroseismology*, 157, 343
- Moskalik, P. i Kołaczkowski, Z. 2009, *MNRAS*, 394, 1649
- Moskalik, P., Smolec, R., Kolenberg, K., i in. 2015, *MNRAS*, 447, 2348
- Muraveva, T., Subramanian, S., Clementini, G., i in. 2018, *MNRAS*, 473, 3131
- Murphy, S. J., Hey, D., Van Reeth, T., i Bedding, T. R. 2019, *MNRAS*, 485, 2380
- Nardetto, N., Mourard, D., Kervella, P., i in. 2006, *A&A*, 453, 309
- Narloch, W., Pietrzyński, G., Kołaczkowski, Z., i in. 2019, *MNRAS*, 489, 3285
- Nelder, J. A. i Mead, R. 1965, *The Computer Journal*, 7, 308
- Nemec, J. M., Balona, L. A., Murphy, S. J., Kinemuchi, K., i Jeon, Y.-B. 2017, *MNRAS*, 466, 1290
- Nemec, J. M., Cohen, J. G., Ripepi, V., i in. 2013, *ApJ*, 773, 181
- Netzel, H. i Smolec, R. 2016, w *37th Meeting of the Polish Astronomical Society*, edytorzy A. Różańska i M. Bejger, Nr 3, 36–39
- Netzel, H. i Smolec, R. 2019, *MNRAS*, 487, 5584

- Netzel, H., Smolec, R., i Dziembowski, W. 2015a, MNRAS, 451, L25
- Netzel, H., Smolec, R., i Moskalik, P. 2015b, MNRAS, 447, 1173
- Netzel, H., Smolec, R., i Moskalik, P. 2015c, MNRAS, 453, 2022
- Netzel, H., Smolec, R., Soszyński, I., i Udalski, A. 2018, MNRAS, 480, 1229
- Niu, J.-S. i Xue, H.-F. 2021, arXiv e-prints, arXiv:2102.10259
- Olech, A., Dziembowski, W. A., Pamyatnykh, A. A., i in. 2005, MNRAS, 363, 40
- Olech, A., Kaluzny, J., Thompson, I. B., i in. 1999, AJ, 118, 442
- Olech, A., Kaluzny, J., Thompson, I. B., i in. 2001, MNRAS, 321, 421
- Olech, A. i Moskalik, P. 2009, A&A, 494, L17
- Osaki, Y. 1971, PASJ, 23, 485
- Paczyński, B. 1969, Acta Astron., 19, 1
- Pamyatnykh, A. A. 1999, Acta Astron., 49, 119
- Paxton, B. 2004, PASP, 116, 699
- Paxton, B., Bildsten, L., Dotter, A., i in. 2011, ApJS, 192, 3
- Paxton, B., Cantiello, M., Arras, P., i in. 2013, ApJS, 208, 4
- Paxton, B., Marchant, P., Schwab, J., i in. 2015, ApJS, 220, 15
- Paxton, B., Schwab, J., Bauer, E. B., i in. 2018, ApJS, 234, 34
- Paxton, B., Smolec, R., Schwab, J., i in. 2019, ApJS, 243, 10
- Petersen, J. O. 1973, A&A, 27, 89
- Pickering, E. C., Colson, H. R., Fleming, W. P., i Wells, L. D. 1901, ApJ, 13, 226
- Pietrukowicz, P., Dziembowski, W. A., Mróz, P., i in. 2013, Acta Astron., 63, 379
- Pietrukowicz, P., Soszyński, I., Netzel, H., i in. 2020, Acta Astron., 70, 241
- Pietrzyński, G., Gieren, W., Szewczyk, O., i in. 2008, AJ, 135, 1993
- Pietrzyński, G., Thompson, I. B., Gieren, W., i in. 2012, Nature, 484, 75
- Pigott, E. 1785, Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series I, 75, 127
- Pilecki, B., Gieren, W., Pietrzyński, G., i in. 2018, ApJ, 862, 43
- Pilecki, B., Graczyk, D., Gieren, W., i in. 2015, ApJ, 806, 29
- Plachy, E., Molnár, L., Bódi, A., i in. 2019, ApJS, 244, 32
- Plachy, E., Pál, A., Bódi, A., i in. 2021, ApJS, 253, 11

- Poleski, R., Soszyński, I., Udalski, A., i in. 2010, *Acta Astron.*, 60, 1
- Preston, G. W. 1959, *ApJ*, 130, 507
- Prudil, Z., Smolec, R., Skarka, M., i Netzel, H. 2017, *MNRAS*, 465, 4074
- Rathour, R. S., Smolec, R., i Netzel, H. 2021, arXiv e-prints, arXiv:2106.02872
- Riess, A. G., Casertano, S., Yuan, W., i in. 2021, *ApJ*, 908, L6
- Rodríguez, E., López-González, M. J., i López de Coca, P. 2000, *A&AS*, 144, 469
- Samadi, R., Belkacem, K., i Sonoï, T. 2015, w *EAS Publications Series*, Nr 73-74, *EAS Publications Series*, 111–191
- Shapley, H. 1914, *ApJ*, 40, 448
- Shapley, H. 1916, *ApJ*, 44, 273
- Simon, N. R. 1982, *ApJ*, 260, L87
- Simon, N. R. i Clement, C. M. 1993, *ApJ*, 410, 526
- Simon, N. R. i Lee, A. S. 1981, *ApJ*, 248, 291
- Skowron, D. M., Skowron, J., Mróz, P., i in. 2019, *Science*, 365, 478
- Smith, M. A. 1977, *ApJ*, 215, 574
- Smolec, R. 2017, *MNRAS*, 468, 4299
- Smolec, R., Moskalik, P., Kałużny, J., i in. 2017, *MNRAS*, 467, 2349
- Smolec, R., Prudil, Z., Skarka, M., i Bakowska, K. 2016a, *MNRAS*, 461, 2934
- Smolec, R., Prudil, Z., Skarka, M., i Bakowska, K. 2016b, *MNRAS*, 461, 2934
- Smolec, R. i Śniegowska, M. 2016, *MNRAS*, 458, 3561
- Solano, E. i Fernley, J. 1997, *A&AS*, 122, 131
- Soszyński, I., Dziembowski, W. A., Udalski, A., i in. 2011a, *Acta Astron.*, 61, 1
- Soszyński, I., Poleski, R., Udalski, A., i in. 2008, *Acta Astron.*, 58, 163
- Soszyński, I., Poleski, R., Udalski, A., i in. 2010a, *Acta Astron.*, 60, 17
- Soszyński, I., Smolec, R., Dziembowski, W. A., i in. 2016, *MNRAS*, 463, 1332
- Soszyński, I., Udalski, A., Pietrukowicz, P., i in. 2011b, *Acta Astron.*, 61, 285
- Soszyński, I., Udalski, A., Szymański, M. K., i in. 2010b, *Acta Astron.*, 60, 165
- Soszyński, I., Udalski, A., Szymański, M. K., i in. 2009, *Acta Astron.*, 59, 1
- Soszyński, I., Udalski, A., Szymański, M. K., i in. 2014, *Acta Astron.*, 64, 177



- Soszyński, I., Udalski, A., Szymański, M. K., i in. 2019a, *Acta Astron.*, 69, 87
- Soszyński, I., Udalski, A., Szymański, M. K., i in. 2015, *Acta Astron.*, 65, 329
- Soszyński, I., Udalski, A., Szymański, M. K., i in. 2017, *Acta Astron.*, 67, 103
- Soszyński, I., Udalski, A., Wrona, M., i in. 2019b, *Acta Astron.*, 69, 321
- Storm, J., Gieren, W., Fouqué, P., i in. 2011, *A&A*, 534, A95
- Süveges, M., Sesar, B., Váradi, M., i in. 2012, *MNRAS*, 424, 2528
- Szabó, R., Benkő, J. M., Páparó, M., i in. 2014, *A&A*, 570, A100
- Szewczyk, O., Pietrzyński, G., Gieren, W., i in. 2009, *AJ*, 138, 1661
- Szewczyk, O., Pietrzyński, G., Gieren, W., i in. 2008, *AJ*, 136, 272
- Templeton, M. R., McNamara, B. J., Guzik, J. A., i in. 1997, *AJ*, 114, 1592
- Tkachenko, A., Van Reeth, T., Tsymbal, V., i in. 2013, *A&A*, 560, A37
- Udalski, A., Szymanski, M., Kaluzny, J., Kubiak, M., i Mateo, M. 1992, *Acta Astron.*, 42, 253
- Udalski, A., Szymański, M. K., i Szymański, G. 2015a, *Acta Astron.*, 65, 1
- Udalski, A., Szymański, M. K., i Szymański, G. 2015b, *Acta Astron.*, 65, 1
- Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., i Shibahashi, H. 1989, *Nonradial oscillations of stars*
- Uytterhoeven, K. 2014a, w *Precision Asteroseismology*, edytorzy J. A. Guzik, W. J. Chaplin, G. Handler, i A. Pigulski, Nr 301, 101–107
- Uytterhoeven, K. 2014b, w *Precision Asteroseismology*, edytorzy J. A. Guzik, W. J. Chaplin, G. Handler, i A. Pigulski, Nr 301, 101–107
- Van Hoolst, T., Dziembowski, W. A., i Kawaler, S. D. 1998, *MNRAS*, 297, 536
- Vučković, M., Østensen, R. H., Aerts, C., i in. 2009, *A&A*, 505, 239
- Wenger, M., Ochsenbein, F., Egret, D., i in. 2000, *A&AS*, 143, 9
- Xiong, D. R., Deng, L., Zhang, C., i Wang, K. 2016, *MNRAS*, 457, 3163
- Zhevakin, S. A. 1963, *ARA&A*, 1, 367
- Zima, W. 2008, *Communications in Asteroseismology*, 157, 387
- Zwintz, K., Fossati, L., Ryabchikova, T., i in. 2014, *Science*, 345, 550

DODATEK A

# Parametry gwiazd RR<sub>0.61</sub> i RR<sub>0.68</sub>

Tabela A.1: Właściwości gwiazd  $RR_{0.61}$ . Kolejne kolumny zawierają nazwę gwiazdy, okres pierwszego owertonu, okres dodatkowego sygnału, stosunek okresów, amplitudę pierwszego owertonu oraz stosunek amplitud dodatkowego sygnału do amplitudy pierwszego owertonu. Ostatnia kolumna zawiera uwagi: ‘komb’ – wykryta częstość kombinacyjna między częstością pierwszego owertonu i częstością dodatkowego sygnału, ‘bl’ – wykryty efekt Błażki, ‘kand’ – dodatkowy sygnał ma  $SNR \approx 4$  lub jego aliasy dobowe mają wyższe amplitudy,  $0.5f_x$  – wykryta subharmonika dodatkowego sygnału.

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
00368	0.27303168(3)	0.1674370(8)	0.61325	0.1013(6)	0.031	kand.
00710	0.28749643(7)	0.180509(1)	0.62787	0.1420(7)	0.021	
00815	0.3117463(3)	0.192034(1)	0.61599	0.120(2)	0.041	
01014	0.30330353(6)	0.186214(1)	0.61395	0.1226(4)	0.022	
01067	0.28294809(2)	0.1736623(8)	0.61376	0.1426(2)	0.013	
01088	0.29471870(5)	0.1811678(9)	0.61471	0.1319(4)	0.021	
01097	0.2923084(4)	0.179451(1)	0.61391	0.1357(5)	0.026	
01099	0.25533780(4)	0.1564733(2)	0.61281	0.1097(3)	0.036	
01117	0.29099566(4)	0.1785419(3)	0.61356	0.1356(4)	0.032	
01118	0.29082264(4)	0.1786575(9)	0.61432	0.1374(3)	0.016	
01183	0.30478519(5)	0.186842(1)	0.61303	0.1390(4)	0.018	
01186	0.30942188(7)	0.190062(1)	0.61425	0.1235(4)	0.021	
01209	0.31927889(8)	0.195666(1)	0.61284	0.1237(5)	0.02	
01213	0.25507415(6)	0.1561186(7)	0.61205	0.0973(5)	0.035	
01355	0.312636(2)	0.191810(2)	0.61352	0.123(2)	0.089	
01744	0.29585261(6)	0.1810786(9)	0.61206	0.1222(4)	0.022	
02119	0.24240010(4)	0.1484259(9)	0.61232	0.1166(5)	0.019	
02167	0.31685902(9)	0.194034(1)	0.61237	0.1230(6)	0.022	
02187	0.31037026(8)	0.190254(1)	0.61299	0.1149(4)	0.023	kand.
02243	0.3248316(2)	0.196940(1)	0.60628	0.0263(3)	0.042	
02366	0.31843153(8)	0.195108(2)	0.61272	0.1132(4)	0.018	
02406	0.35005209(8)	0.220784(2)	0.63072	0.1380(5)	0.017	
02409	0.32008133(9)	0.196221(1)	0.61303	0.1134(5)	0.023	
02494	0.31476910(10)	0.192830(1)	0.61261	0.1126(6)	0.02	
	0.31476910(10)	0.195666(2)	0.62162	0.1126(6)	0.025	
02592	0.31349889(8)	0.192323(1)	0.61347	0.1223(5)	0.025	
02607	0.30212853(5)	0.185281(1)	0.61325	0.1299(4)	0.016	
02642	0.33653463(7)	0.212297(2)	0.63083	0.1246(4)	0.013	
	0.33653463(7)	0.211767(2)	0.62926	0.1246(4)	0.014	
02963	0.30895777(9)	0.189580(1)	0.61361	0.1015(5)	0.027	
03124	0.30139895(8)	0.1853948(5)	0.61511	0.1277(6)	0.027	kand.
03186	0.28434260(3)	0.175276(1)	0.61643	0.1483(4)	0.011	
03197	0.31556218(2)	0.194368(1)	0.61594	0.1309(4)	0.014	
03225	0.31891007(7)	0.195475(2)	0.61295	0.1229(4)	0.02	
03417	0.30092069(7)	0.1846212(9)	0.61352	0.1273(5)	0.029	
03594	0.29519123(7)	0.180908(1)	0.61285	0.1379(5)	0.023	
03615	0.31293133(6)	0.1944662(9)	0.62143	0.1265(4)	0.022	

*Kontynuacja na następnej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
03687	0.2963329(1)	0.181640(1)	0.61296	0.0534(4)	0.039	
03710	0.3194060(2)	0.204275(2)	0.63955	0.1211(10)	0.043	
03797	0.26723945(4)	0.163729(1)	0.61267	0.1034(3)	0.015	kand.
03952	0.28734866(4)	0.1808065(10)	0.62922	0.1237(3)	0.013	
03954	0.29616868(6)	0.1811923(10)	0.61179	0.0598(2)	0.022	
03970	0.32661834(9)	0.205836(2)	0.6302	0.1232(6)	0.015	0.5 $f_x$
04031	0.31144901(6)	0.189695(1)	0.60907	0.1271(4)	0.019	
04067	0.3199257(1)	0.195916(1)	0.61238	0.1045(5)	0.026	
	0.3199257(1)	0.199455(1)	0.62344	0.1045(5)	0.029	
04083	0.28947359(5)	0.177066(1)	0.61168	0.1211(3)	0.017	
04105	0.30581872(8)	0.187249(1)	0.61229	0.1304(5)	0.024	
04144	0.3663029(2)	0.223950(2)	0.61138	0.1139(10)	0.022	kand.
04209	0.28981732(7)	0.177829(4)	0.61359	0.1363(6)	0.018	
04242	0.31946328(8)	0.195659(1)	0.61246	0.1224(5)	0.018	
04324	0.30834017(7)	0.189200(1)	0.61361	0.1186(5)	0.025	
04411	0.29236826(7)	0.179314(1)	0.61332	0.1404(6)	0.025	
04434	0.31633013(8)	0.199559(1)	0.63086	0.1239(4)	0.021	
04437	0.3025502(2)	0.187196(1)	0.61873	0.139(1)	0.058	
04446	0.30449818(9)	0.186248(2)	0.61166	0.1270(5)	0.025	
04449	0.3657049(1)	0.231291(2)	0.63245	0.1149(4)	0.018	kand.
04457	0.2378579(2)	0.1453596(9)	0.61112	0.100(2)	0.029	
04466	0.29726286(5)	0.1822009(10)	0.61293	0.1246(3)	0.022	
	0.29726286(5)	0.184792(1)	0.62165	0.1246(3)	0.014	
04469	0.31722366(8)	0.1973855(8)	0.62223	0.1235(5)	0.016	
04489	0.29242286(5)	0.1796968(9)	0.61451	0.1377(5)	0.026	
04502	0.28919097(6)	0.1777439(10)	0.61462	0.1390(6)	0.026	
04508	0.33625015(6)	0.206541(1)	0.61425	0.1238(3)	0.017	
04536	0.31134175(7)	0.194946(1)	0.62615	0.1046(4)	0.014	
04549	0.29963789(6)	0.1887434(3)	0.6299	0.1224(4)	0.021	0.5 $f_x$
04596	0.3167623(2)	0.194071(1)	0.61267	0.1133(4)	0.024	
04599	0.28939129(4)	0.177970(1)	0.61498	0.1403(3)	0.017	
04600	0.30773350(6)	0.193078(2)	0.62742	0.1416(4)	0.011	
04653	0.30212857(7)	0.185288(1)	0.61328	0.1218(5)	0.026	
04673	0.29624429(5)	0.1814880(5)	0.61263	0.1357(4)	0.017	
04713	0.30986014(9)	0.190247(1)	0.61398	0.1356(6)	0.028	
04742	0.34604132(5)	0.217141(1)	0.6275	0.1383(3)	0.015	0.5 $f_x$
	0.34604132(5)	0.218127(2)	0.63035	0.1383(3)	0.012	
04754	0.28631140(4)	0.175781(2)	0.61395	0.1275(3)	0.027	
04762	0.29465508(9)	0.1806091(7)	0.61295	0.1259(6)	0.046	
04804	0.31313647(4)	0.192156(2)	0.61365	0.1267(6)	0.027	
04806	0.3221128(1)	0.196781(2)	0.61091	0.1127(4)	0.018	
04902	0.32219135(6)	0.197265(1)	0.61226	0.1231(3)	0.019	
04909	0.31610582(7)	0.193618(1)	0.61251	0.1448(5)	0.019	
04918	0.21911351(4)	0.1346378(5)	0.61447	0.1039(4)	0.031	

*Kontynuacja na następnnej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
04932	0.31067201(8)	0.1895998(3)	0.61029	0.1208(6)	0.022	
04974	0.29665461(5)	0.1816314(7)	0.61227	0.1234(4)	0.029	
04989	0.30669363(5)	0.187627(1)	0.61177	0.1307(3)	0.013	
05010	0.28887291(6)	0.177289(1)	0.61373	0.1252(5)	0.018	
05071	0.33468607(6)	0.210775(2)	0.62977	0.1364(3)	0.015	0.5 $f_x$
05073	0.28573456(6)	0.175848(1)	0.61542	0.1080(4)	0.015	
05103	0.28739704(4)	0.1765644(9)	0.61436	0.1491(4)	0.016	
05178	0.37063337(9)	0.235621(2)	0.63573	0.1273(4)	0.015	
05201	0.29692924(5)	0.1822046(9)	0.61363	0.1282(4)	0.024	
05202	0.31386605(5)	0.199562(1)	0.63582	0.1258(3)	0.017	0.5 $f_x$
	0.31386605(5)	0.192226(1)	0.61245	0.1258(3)	0.014	
05231	0.28600939(2)	0.1754631(10)	0.61349	0.1443(2)	0.01	
05266	0.30484525(4)	0.1869213(9)	0.61317	0.1263(2)	0.016	
	0.30484525(4)	0.189471(1)	0.62153	0.1263(2)	0.013	
05291	0.32072269(2)	0.1969553(10)	0.6141	0.1146(3)	0.017	
05296	0.31873205(2)	0.1982157(7)	0.62189	0.1326(2)	0.02	0.5 $f_x$
	0.31873205(2)	0.1952212(9)	0.61249	0.1326(2)	0.015	
05301	0.30561492(3)	0.1872876(5)	0.61282	0.1240(2)	0.034	
05308	0.29559922(4)	0.1817250(8)	0.61477	0.1075(3)	0.018	
05311	0.29733335(4)	0.1827430(5)	0.61461	0.1218(2)	0.03	
05315	0.29958518(4)	0.1839707(9)	0.61408	0.1317(3)	0.019	
05316	0.27746606(3)	0.170244(1)	0.61357	0.1553(3)	0.011	kand.
05328	0.30228358(5)	0.1847428(5)	0.61116	0.1389(3)	0.027	
05343	0.31876771(9)	0.195313(1)	0.61271	0.1131(5)	0.022	
05407	0.29957178(7)	0.183965(1)	0.61409	0.1081(5)	0.022	
05408	0.32690604(8)	0.204089(2)	0.6243	0.1037(2)	0.014	kand.
05462	0.31296441(10)	0.193989(1)	0.61984	0.1210(6)	0.03	
05477	0.30324951(3)	0.1858695(4)	0.61293	0.1245(2)	0.028	
05504	0.31484445(5)	0.195837(1)	0.62201	0.1220(3)	0.018	
	0.31484445(5)	0.192942(2)	0.61282	0.1220(3)	0.013	
05527	0.287153170(10)	0.1762484(7)	0.61378	0.1230(3)	0.015	
05529	0.34545856(8)	0.217400(2)	0.62931	0.1148(4)	0.015	0.5 $f_x$ , kand.
05531	0.30808172(7)	0.1890627(10)	0.61368	0.0945(3)	0.026	
05535	0.30310723(10)	0.1858008(8)	0.61299	0.1178(6)	0.046	
05542	0.28751182(2)	0.1773122(6)	0.61671	0.1423(1)	0.008	
05600	0.30881624(3)	0.1888918(6)	0.61166	0.1300(2)	0.024	
05612	0.32531345(3)	0.204827(2)	0.62963	0.1541(2)	0.006	0.5 $f_x$ , kand.
05619	0.28861170(4)	0.176206(1)	0.61053	0.1434(4)	0.013	kand.
05650	0.29725501(4)	0.1828744(9)	0.61521	0.1376(4)	0.019	
05666	0.30623626(7)	0.187245(1)	0.61144	0.1575(5)	0.024	kand.
05672	0.28434589(3)	0.1746395(7)	0.61418	0.1483(2)	0.013	
05679	0.30649533(7)	0.188245(1)	0.61419	0.1297(5)	0.024	
05688	0.31810101(6)	0.197472(1)	0.62078	0.1240(3)	0.018	
	0.31810101(6)	0.194848(2)	0.61253	0.1240(3)	0.012	

*Kontynuacja na następnnej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
05716	0.30570641(5)	0.187377(1)	0.61293	0.1287(4)	0.018	
05765	0.30791807(5)	0.1889314(8)	0.61358	0.1237(3)	0.027	
05770	0.30321035(6)	0.186000(1)	0.61344	0.1415(5)	0.014	
05784	0.29754286(10)	0.182044(1)	0.61182	0.1246(7)	0.029	kand.
05816	0.30429030(6)	0.1868125(6)	0.61393	0.1188(5)	0.036	
05820	0.33503778(9)	0.210846(2)	0.62932	0.1206(5)	0.021	0.5 $f_x$ , kand.
05831	0.31680023(4)	0.193866(1)	0.61195	0.0927(2)	0.011	
05837	0.30154074(3)	0.1851232(4)	0.61392	0.1173(2)	0.026	
05895	0.30326116(5)	0.185498(1)	0.61168	0.1336(4)	0.018	
05896	0.26625737(2)	0.161317(1)	0.60587	0.1542(2)	0.006	
05898	0.32687393(7)	0.206223(1)	0.63089	0.1317(4)	0.021	bl
05924	0.29996857(4)	0.1842050(10)	0.61408	0.1439(3)	0.017	
05928	0.31043474(4)	0.190623(1)	0.61405	0.1000(2)	0.012	
05931	0.30140908(4)	0.184753(1)	0.61296	0.1343(3)	0.02	
	0.30140908(4)	0.190245(1)	0.63119	0.1343(3)	0.013	
05934	0.29263084(3)	0.1794855(7)	0.61335	0.1312(2)	0.018	
05937	0.31421047(4)	0.1924421(7)	0.61246	0.1243(2)	0.022	
	0.31421047(4)	0.1952707(10)	0.62146	0.1243(2)	0.014	
05956	0.2917428(7)	0.179072(2)	0.6138	0.1352(4)	0.021	
05965	0.31396072(3)	0.1925594(9)	0.61332	0.1158(2)	0.018	0.5 $f_x$
05968	0.31756174(6)	0.194676(1)	0.61303	0.1112(3)	0.013	0.5 $f_x$
	0.31756174(6)	0.200341(1)	0.63087	0.1112(3)	0.013	
05970	0.31341714(8)	0.192175(1)	0.61316	0.1183(5)	0.023	0.5 $f_x$
05979	0.35651736(5)	0.218450(1)	0.61273	0.1631(4)	0.013	
05995	0.29034905(8)	0.182956(1)	0.63012	0.0916(4)	0.027	
06028	0.28433564(4)	0.174395(3)	0.61334	0.1189(3)	0.014	
06054	0.28038913(3)	0.1720319(7)	0.61355	0.1431(3)	0.02	
06082	0.2732693(1)	0.1673729(7)	0.61248	0.1072(4)	0.019	bl
06083	0.30647373(3)	0.1875653(5)	0.61201	0.1361(2)	0.021	
	0.30647373(3)	0.190681(1)	0.62218	0.1361(2)	0.008	
06085	0.30688310(5)	0.1883120(2)	0.61363	0.1258(3)	0.043	
06098	0.32589326(4)	0.205831(6)	0.63159	0.1367(3)	0.01	
06115	0.31080056(9)	0.193109(1)	0.62133	0.1176(6)	0.027	
06130	0.30383640(4)	0.1863228(8)	0.61323	0.0944(2)	0.022	
06143	0.30874855(5)	0.1894841(8)	0.61372	0.1213(3)	0.023	
06149	0.278540310(10)	0.1708440(7)	0.61335	0.1050(2)	0.014	
06163	0.32623678(6)	0.206107(2)	0.63177	0.1302(4)	0.014	
06177	0.31831669(9)	0.194100(1)	0.60977	0.1299(6)	0.02	
06188	0.32420355(7)	0.204654(2)	0.63125	0.1186(4)	0.014	
06200	0.28698549(2)	0.1757389(5)	0.61236	0.1488(2)	0.017	
06226	0.26727437(2)	0.167808(2)	0.62785	0.1393(2)	0.005	0.5 $f_x$ , kand.
06238	0.23357266(2)	0.1433970(7)	0.61393	0.1233(3)	0.012	
06252	0.30491824(8)	0.187095(1)	0.61359	0.1244(5)	0.026	
06265	0.32974362(4)	0.207186(1)	0.62832	0.1241(2)	0.011	0.5 $f_x$

*Kontynuacja na następnnej stronie*



Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
06268	0.33541986(10)	0.206067(2)	0.61436	0.1134(5)	0.021	kand.
06273	0.31513651(7)	0.195710(1)	0.62103	0.1189(4)	0.022	0.5 $f_x$ , kand.
06329	0.27112592(2)	0.164150(1)	0.60544	0.1480(2)	0.007	
06346	0.2911184(5)	0.1788248(10)	0.61427	0.1402(9)	0.019	
06349	0.30871031(6)	0.189396(1)	0.61351	0.1120(3)	0.021	
06352	0.3162666(2)	0.19393604(7)	0.6132	0.1179(2)	0.092	0.5 $f_x$
	0.3162666(2)	0.1996379(6)	0.63123	0.1179(2)	0.012	
06359	0.28202339(3)	0.1731326(5)	0.61389	0.1345(3)	0.028	
06374	0.272961460(10)	0.1672792(7)	0.61283	0.1059(3)	0.024	
06383	0.31355197(7)	0.191110(1)	0.6095	0.1359(5)	0.023	
06418	0.30591874(5)	0.187707(1)	0.61358	0.1254(4)	0.016	kand.
06420	0.31401224(5)	0.1924608(9)	0.61291	0.1041(3)	0.023	
06439	0.30499274(4)	0.186960(2)	0.613	0.1232(3)	0.028	
06456	0.29828851(4)	0.1825150(9)	0.61187	0.1167(3)	0.018	
06461	0.29650769(3)	0.1863225(9)	0.62839	0.1303(2)	0.01	0.5 $f_x$
	0.29650769(3)	0.187160(1)	0.63121	0.1303(2)	0.01	
06497	0.281185110(10)	0.1723065(5)	0.61279	0.1544(3)	0.024	
06505	0.3019304(1)	0.1851770(9)	0.61331	0.1084(7)	0.012	
06571	0.29408221(3)	0.1802997(8)	0.61309	0.1187(2)	0.014	
06587	0.37232653(6)	0.233357(1)	0.62675	0.1011(2)	0.021	0.5 $f_x$
06596	0.29223285(2)	0.179622(1)	0.61465	0.1369(2)	0.012	
06601	0.30276894(7)	0.1857690(5)	0.61357	0.1221(5)	0.02	
06608	0.30187600(3)	0.185138(1)	0.61329	0.1376(2)	0.014	
06610	0.3162340(1)	0.196523(2)	0.62145	0.1153(2)	0.011	0.5 $f_x$
	0.3162340(1)	0.199508(2)	0.63089	0.1153(2)	0.01	
06617	0.32632516(3)	0.2060354(6)	0.63138	0.1379(2)	0.012	0.5 $f_x$
06627	0.29820477(3)	0.1807152(6)	0.60601	0.1154(2)	0.018	
06637	0.29090046(4)	0.1784261(8)	0.61336	0.1384(4)	0.017	
06647	0.31113207(6)	0.1908536(9)	0.61342	0.1210(4)	0.026	
06659	0.28984257(3)	0.1769863(8)	0.61063	0.1155(2)	0.015	
06672	0.25473335(7)	0.1560260(9)	0.61251	0.0728(4)	0.03	
06682	0.31607422(3)	0.199381(1)	0.6308	0.1162(2)	0.009	
06693	0.29234241(5)	0.1793632(7)	0.61354	0.1338(5)	0.011	
06789	0.24593153(6)	0.1517751(8)	0.61714	0.0723(3)	0.024	
06796	0.33183560(6)	0.212490(1)	0.64035	0.1314(3)	0.012	0.5 $f_x$
06802	0.31830253(5)	0.1950695(9)	0.61284	0.1097(2)	0.018	0.5 $f_x$
	0.31830253(5)	0.1979170(8)	0.62179	0.1097(2)	0.014	
	0.31830253(5)	0.2010085(10)	0.6315	0.1097(2)	0.012	
06806	0.3100266(1)	0.1904697(7)	0.61437	0.1237(9)	0.023	
06861	0.28913263(3)	0.1774095(6)	0.61359	0.1429(3)	0.023	
06862	0.30842815(4)	0.188368(1)	0.61074	0.1361(3)	0.012	kand.
06874	0.26189420(4)	0.1604280(6)	0.61257	0.1145(3)	0.031	
06885	0.28524591(2)	0.1752734(6)	0.61446	0.1501(2)	0.013	
06922	0.30877929(3)	0.1918750(9)	0.6214	0.1288(2)	0.016	

*Kontynuacja na następnnej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
	0.30877929(3)	0.1891884(10)	0.6127	0.1288(2)	0.014	
	0.30877929(3)	0.194793(1)	0.63085	0.1288(2)	0.01	
06943	0.32633872(4)	0.207176(2)	0.63485	0.1349(2)	0.008	kand.
07047	0.30496436(2)	0.1865778(8)	0.6118	0.1336(2)	0.012	
	0.30496436(2)	0.1893182(9)	0.62079	0.1336(2)	0.012	
	0.30496436(2)	0.1922192(9)	0.6303	0.1336(2)	0.011	
07076	0.29638068(2)	0.1815819(9)	0.61266	0.1253(2)	0.011	
07085	0.2919151(2)	0.1804117(6)	0.61803	0.117(1)	0.047	bl
07091	0.27902722(4)	0.1709779(6)	0.61276	0.1472(4)	0.016	
07094	0.26796838(3)	0.1641731(7)	0.61266	0.1094(2)	0.021	
	0.26796838(3)	0.1662106(7)	0.62026	0.1094(2)	0.016	
07096	0.31879405(3)	0.1954778(6)	0.61318	0.1165(2)	0.02	
07103	0.30453247(4)	0.1860722(5)	0.61101	0.1236(2)	0.018	
07118	0.31577711(3)	0.1964602(10)	0.62215	0.1212(2)	0.013	
07163	0.31555022(3)	0.193328(1)	0.61267	0.1178(2)	0.013	
07232	0.30926643(3)	0.1891913(9)	0.61174	0.1448(2)	0.012	0.5 $f_x$
	0.30926643(3)	0.191975(1)	0.62074	0.1448(2)	0.009	
	0.30926643(3)	0.194931(2)	0.6303	0.1448(2)	0.007	
07265	0.28097455(2)	0.170457(1)	0.60666	0.1191(3)	0.011	
07292	0.32492761(2)	0.205060(1)	0.63109	0.1302(1)	0.011	0.5 $f_x$
07303	0.32196111(4)	0.200574(1)	0.62298	0.1225(2)	0.011	kand.
	0.32196111(4)	0.197264(1)	0.6127	0.1225(2)	0.009	
07351	0.31626603(4)	0.196576(1)	0.62155	0.1194(2)	0.013	0.5 $f_x$
	0.31626603(4)	0.1940850(6)	0.61368	0.1194(2)	0.011	
	0.31626603(4)	0.1995293(6)	0.63089	0.1194(2)	0.011	
07353	0.30100588(4)	0.190408(1)	0.63257	0.1240(3)	0.011	0.5 $f_x$
	0.30100588(4)	0.189531(2)	0.62966	0.1240(3)	0.01	
07358	0.28948631(7)	0.1775350(9)	0.61328	0.1357(6)	0.029	
07375	0.32464996(4)	0.2017260(8)	0.62136	0.1233(2)	0.011	0.5 $f_x$
	0.32464996(4)	0.1989152(8)	0.61271	0.1233(2)	0.012	
07423	0.3288903(2)	0.202127(2)	0.61457	0.1136(7)	0.031	
07448	0.3701437(1)	0.232150(3)	0.62719	0.0691(3)	0.025	0.5 $f_x$
07486	0.31702951(2)	0.1996351(2)	0.62971	0.1403(1)	0.013	
07487	0.31804572(7)	0.195036(1)	0.61323	0.1208(4)	0.018	
07500	0.32307860(2)	0.2041244(10)	0.63181	0.1259(1)	0.01	0.5 $f_x$
	0.32307860(2)	0.197871(1)	0.61245	0.1259(1)	0.009	
07508	0.29537403(3)	0.1810988(6)	0.61312	0.1356(2)	0.024	
07517	0.32565035(3)	0.2050801(4)	0.62976	0.1219(2)	0.018	0.5 $f_x$
07518	0.29360651(2)	0.1802886(3)	0.61405	0.1356(2)	0.039	
07556	0.31412516(5)	0.192633(1)	0.61324	0.1196(3)	0.016	0.5 $f_x$
07559	0.32052463(3)	0.202284(1)	0.6311	0.1127(1)	0.009	
07564	0.27633242(7)	0.174135(1)	0.63016	0.1122(5)	0.022	
07592	0.26726043(5)	0.1687514(8)	0.63141	0.1046(4)	0.024	
07599	0.31312320(7)	0.194808(2)	0.62214	0.1106(4)	0.015	

*Kontynuacja na następnej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
	0.31312320(7)	0.192049(1)	0.61333	0.1106(4)	0.017	
07613	0.30348619(7)	0.185701(1)	0.61189	0.1309(5)	0.021	
07665	0.26829993(4)	0.1660553(9)	0.61892	0.1051(3)	0.015	
	0.26829993(4)	0.1694032(4)	0.63139	0.1051(3)	0.009	
07677	0.29485394(4)	0.180967(1)	0.61375	0.1173(3)	0.021	
07701	0.29795139(3)	0.1826693(6)	0.61308	0.1468(2)	0.015	
07710	0.26706107(5)	0.162881(1)	0.6099	0.0996(4)	0.026	
07714	0.36977792(3)	0.224940(1)	0.60831	0.1251(1)	0.008	
07722	0.32054475(3)	0.1956329(7)	0.61031	0.1522(2)	0.014	0.5 $f_x$
07723	0.35600180(5)	0.217684(1)	0.61147	0.1310(2)	0.01	0.5 $f_x$
07741	0.30473373(6)	0.1865450(6)	0.61216	0.1064(3)	0.035	
07764	0.30888116(4)	0.1893801(8)	0.61312	0.1219(3)	0.021	
	0.30888116(4)	0.194906(1)	0.63101	0.1219(3)	0.013	
07781	0.4291866(3)	0.264511(2)	0.61631	0.1036(6)	0.014	kand.
07783	0.26444657(8)	0.1616242(10)	0.61118	0.1547(9)	0.027	
07788	0.29508748(5)	0.180718(1)	0.61242	0.1281(4)	0.014	
07803	0.31390033(3)	0.1921996(8)	0.61229	0.1245(2)	0.021	
	0.31390033(3)	0.198115(1)	0.63114	0.1245(2)	0.009	
07806	0.31899507(3)	0.195456(1)	0.61272	0.1233(1)	0.011	0.5 $f_x$
	0.31899507(3)	0.1982080(8)	0.62135	0.1233(1)	0.013	
	0.31899507(3)	0.2014255(9)	0.63144	0.1233(1)	0.011	
07831	0.31313989(4)	0.1919759(10)	0.61307	0.1168(3)	0.029	0.5 $f_x$
	0.31313989(4)	0.194856(1)	0.62227	0.1168(3)	0.011	
07832	0.25530214(8)	0.1568946(7)	0.61454	0.1042(7)	0.014	
07836	0.32262696(8)	0.203509(1)	0.63079	0.1507(6)	0.017	0.5 $f_x$
07857	0.32087805(3)	0.1993438(6)	0.62124	0.1238(2)	0.016	
07863	0.32476360(9)	0.205016(1)	0.63128	0.1263(5)	0.021	
07887	0.30227798(6)	0.185907(1)	0.61502	0.1222(4)	0.016	
07903	0.25965543(2)	0.1592508(8)	0.61332	0.1493(2)	0.008	
07907	0.28778891(3)	0.1765896(7)	0.61361	0.1455(3)	0.017	
07928	0.26103870(5)	0.1650893(7)	0.63243	0.0909(3)	0.03	
07937	0.28029899(2)	0.1721190(4)	0.61406	0.1367(2)	0.066	
07961	0.31580997(4)	0.196416(1)	0.62194	0.1197(3)	0.015	
	0.31580997(4)	0.193709(1)	0.61337	0.1197(3)	0.013	
07962	0.24462748(3)	0.1498247(5)	0.61246	0.1122(3)	0.026	
07964	0.32793237(3)	0.1996974(8)	0.60896	0.1349(2)	0.013	kand.
07965	0.27619564(2)	0.1697181(7)	0.61449	0.1473(3)	0.013	
07968	0.29742990(3)	0.182261(1)	0.61279	0.1189(3)	0.012	
07977	0.21697698(3)	0.1334638(7)	0.61511	0.1026(4)	0.019	
07996	0.31787979(5)	0.197504(1)	0.62132	0.1282(3)	0.012	0.5 $f_x$ , kand.
07999	0.326412300(10)	0.2029670(4)	0.62181	0.1036(2)	0.018	0.5 $f_x$
08002	0.30879120(3)	0.1891872(8)	0.61267	0.1166(2)	0.013	
	0.30879120(3)	0.1946830(10)	0.63047	0.1166(2)	0.009	
08033	0.27782677(2)	0.1706193(10)	0.61412	0.1831(3)	0.009	

*Kontynuacja na następnnej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
08047	0.33708467(5)	0.2120639(3)	0.62911	0.1433(3)	0.017	0.5 $f_x$ bl
08048	0.31430279(3)	0.192294(5)	0.61181	0.1339(2)	0.012	0.5 $f_x$
	0.31430279(3)	0.195128(2)	0.62083	0.1339(2)	0.008	
08084	0.31469810(5)	0.192996(1)	0.61327	0.1279(3)	0.016	
	0.31469810(5)	0.195619(1)	0.62161	0.1279(3)	0.012	
08087	0.31632144(7)	0.1939952(7)	0.61329	0.1073(4)	0.021	
08097	0.31846184(10)	0.198016(2)	0.62179	0.1209(5)	0.02	kand.
08108	0.31320005(4)	0.191847(1)	0.61254	0.1235(2)	0.012	
	0.31320005(4)	0.197477(1)	0.63051	0.1235(2)	0.011	
08123	0.28761001(7)	0.175820(1)	0.61131	0.1187(5)	0.01	kand.
08125	0.27681123(3)	0.1696468(4)	0.61286	0.1011(2)	0.03	
08137	0.3079950(10)	0.1890322(7)	0.61375	0.1286(4)	0.02	
08138	0.31863878(4)	0.201030(1)	0.6309	0.1192(3)	0.012	0.5 $f_x$
08148	0.28819496(4)	0.177189(1)	0.61482	0.1302(3)	0.014	
08158	0.32744431(4)	0.2034111(10)	0.62121	0.1285(3)	0.012	0.5 $f_x$
08159	0.31507831(6)	0.195915(1)	0.6218	0.1229(4)	0.02	
08170	0.32305872(3)	0.1994548(9)	0.61739	0.1164(2)	0.014	
08177	0.28513618(4)	0.1751747(9)	0.61435	0.1380(3)	0.014	bl
08183	0.29385880(4)	0.1805521(8)	0.61442	0.1373(4)	0.02	
08186	0.29419968(3)	0.1858289(9)	0.63164	0.1160(2)	0.012	0.5 $f_x$
08187	0.32335404(9)	0.198424(2)	0.61364	0.1272(6)	0.016	kand.
08209	0.25811797(3)	0.1580910(7)	0.61248	0.0962(2)	0.02	
	0.25811797(3)	0.1605216(7)	0.62189	0.0962(2)	0.017	
08214	0.31067628(3)	0.1905933(4)	0.61348	0.1243(2)	0.025	0.5 $f_x$
	0.31067628(3)	0.1932697(9)	0.62209	0.1243(2)	0.014	
08237	0.31762956(4)	0.1946851(9)	0.61293	0.1176(2)	0.015	
08248	0.28522012(3)	0.1747361(8)	0.61264	0.1338(2)	0.013	
08261	0.36067970(7)	0.226948(2)	0.62922	0.1141(3)	0.013	kand.
08302	0.29945276(3)	0.1839611(6)	0.61432	0.1309(2)	0.018	
	0.29945276(3)	0.1857436(9)	0.62028	0.1309(2)	0.011	
08318	0.30413328(3)	0.1866294(10)	0.61364	0.1347(2)	0.011	
	0.30413328(3)	0.191738(1)	0.63044	0.1347(2)	0.008	
08321	0.33110180(7)	0.20322(2)	0.61377	0.1356(5)	0.021	
08349	0.29708835(3)	0.182476(2)	0.61421	0.1297(2)	0.023	
08361	0.30775625(8)	0.1889834(8)	0.61407	0.1242(6)	0.02	
08387	0.30162029(4)	0.1848786(5)	0.61295	0.1149(3)	0.03	
08390	0.29068697(3)	0.1776034(7)	0.61098	0.1315(2)	0.014	
08395	0.27681496(3)	0.1689393(7)	0.6103	0.0928(2)	0.022	
08396	0.29395271(4)	0.1804451(10)	0.61386	0.1337(3)	0.016	
08433	0.31841475(7)	0.19499(2)	0.61238	0.1356(5)	0.01	
08435	0.28638926(2)	0.1758577(8)	0.61405	0.1434(2)	0.017	
08443	0.30693444(3)	0.188158(1)	0.61302	0.1558(4)	0.012	kand.
08453	0.30799097(9)	0.188929(1)	0.61342	0.1255(5)	0.019	kand.
08460	0.36490289(3)	0.228340(1)	0.62576	0.1132(1)	0.01	0.5 $f_x$

*Kontynuacja na następnej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
08463	0.34095394(4)	0.2137211(2)	0.62683	0.1402(2)	0.069	
08470	0.35559718(5)	0.224513(1)	0.63137	0.1298(3)	0.009	kand.
	0.35559718(5)	0.223686(2)	0.62904	0.1298(3)	0.009	
08475	0.31094850(5)	0.1904943(6)	0.61262	0.1073(2)	0.018	
	0.31094850(5)	0.1962916(7)	0.63127	0.1073(2)	0.014	
08521	0.29705730(7)	0.181918(1)	0.6124	0.1160(5)	0.017	
08584	0.31624769(6)	0.193909(1)	0.61316	0.1114(3)	0.019	
08590	0.24166428(3)	0.1484770(5)	0.61439	0.0827(2)	0.024	
08591	0.30219949(3)	0.1855363(6)	0.61395	0.1245(2)	0.028	
08594	0.29978662(2)	0.1835684(4)	0.61233	0.1310(2)	0.034	
08597	0.32092790(4)	0.2022931(10)	0.63034	0.1367(3)	0.015	
08623	0.30822782(9)	0.188471(1)	0.61147	0.1166(6)	0.028	
08637	0.29545625(7)	0.181557(1)	0.6145	0.1361(6)	0.019	
08640	0.28459786(2)	0.1746397(7)	0.61364	0.1283(2)	0.023	bl
08653	0.36015945(9)	0.2223243(10)	0.61729	0.1271(4)	0.008	
08662	0.32229264(3)	0.2034956(3)	0.6314	0.1454(2)	0.012	0.5 $f_x$
	0.32229264(3)	0.2029785(6)	0.6298	0.1454(2)	0.01	
08671	0.31310944(6)	0.191805(1)	0.61258	0.1239(4)	0.016	
08674	0.31692033(2)	0.1941955(8)	0.61276	0.1226(1)	0.015	0.5 $f_x$
08691	0.31687267(7)	0.194344(1)	0.61332	0.1217(4)	0.016	kand.
08692	0.27143652(7)	0.1660583(10)	0.61178	0.0948(5)	0.022	kand.
08698	0.25439361(5)	0.1558065(8)	0.61246	0.0966(4)	0.026	
08709	0.31485250(6)	0.193090(2)	0.61327	0.1278(4)	0.016	
08714	0.34099890(2)	0.209409(1)	0.6141	0.1314(1)	0.008	
08715	0.36985794(3)	0.233237(2)	0.63061	0.1301(2)	0.008	0.5 $f_x$
	0.36985794(3)	0.231580(1)	0.62613	0.1301(2)	0.009	
08716	0.28834207(3)	0.1772761(7)	0.61481	0.1353(3)	0.018	
08721	0.24131811(3)	0.1475510(4)	0.61144	0.0803(2)	0.031	
08734	0.30813817(3)	0.1890078(6)	0.61339	0.1280(2)	0.019	
	0.30813817(3)	0.194526(1)	0.63129	0.1280(2)	0.009	
08745	0.29344543(4)	0.180267(1)	0.61431	0.1298(3)	0.015	
08759	0.29707660(5)	0.182046(1)	0.61279	0.1301(4)	0.017	
08765	0.28219917(2)	0.173344(1)	0.61426	0.1451(2)	0.014	
08772	0.32408801(3)	0.195900(1)	0.60447	0.1369(2)	0.008	
08788	0.28739179(5)	0.1763023(8)	0.61346	0.1366(4)	0.022	
08799	0.31734930(3)	0.194598(2)	0.6132	0.1252(2)	0.016	0.5 $f_x$
	0.31734930(3)	0.2002600(4)	0.63104	0.1252(2)	0.01	
08806	0.35863521(4)	0.226553(1)	0.63171	0.1228(2)	0.009	0.5 $f_x$
	0.35863521(4)	0.224304(2)	0.62544	0.1228(2)	0.007	
08818	0.31261154(3)	0.1919419(8)	0.61399	0.1238(2)	0.016	0.5 $f_x$
	0.31261154(3)	0.194588(1)	0.62246	0.1238(2)	0.009	
08824	0.30035643(2)	0.1836967(3)	0.6116	0.1230(2)	0.03	
08826	0.31251553(3)	0.1972236(7)	0.63108	0.1012(1)	0.011	0.5 $f_x$
	0.31251553(3)	0.1912645(7)	0.61202	0.1012(1)	0.011	

*Kontynuacja na następnnej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
	0.31251553(3)	0.1972236(7)	0.63108	0.1012(1)	0.011	
08836	0.31737227(4)	0.1972519(9)	0.62152	0.1224(2)	0.016	0.5 $f_x$
	0.31737227(4)	0.2002220(10)	0.63087	0.1224(2)	0.014	
08844	0.28957197(2)	0.1775254(3)	0.61306	0.1289(2)	0.022	
08846	0.32865557(8)	0.201662(1)	0.6136	0.1192(4)	0.017	
08847	0.26403220(3)	0.1618406(8)	0.61296	0.0723(1)	0.012	
08863	0.28168676(5)	0.1729094(4)	0.61384	0.1388(5)	0.01	
08864	0.31455752(6)	0.193435(8)	0.61494	0.1467(4)	0.014	
08866	0.24141785(2)	0.1480085(6)	0.61308	0.1351(2)	0.013	
08877	0.29017300(4)	0.178173(1)	0.61402	0.1284(5)	0.022	
08896	0.28189040(2)	0.1737032(8)	0.61621	0.1468(2)	0.01	
08898	0.27934085(2)	0.1718724(7)	0.61528	0.1524(2)	0.01	
08918	0.31323065(4)	0.197364(1)	0.63009	0.1339(3)	0.01	
08920	0.31500873(6)	0.1931971(8)	0.61331	0.1177(3)	0.023	
	0.31500873(6)	0.198862(1)	0.63129	0.1177(3)	0.02	
08945	0.28842634(2)	0.1767927(4)	0.61296	0.1394(1)	0.018	
08958	0.29293145(2)	0.179165(2)	0.61163	0.1534(3)	0.012	
08968	0.29176953(4)	0.178368(1)	0.61133	0.1272(3)	0.012	
08973	0.30873469(4)	0.1893992(5)	0.61347	0.1272(3)	0.021	bl
08980	0.31356147(3)	0.1916661(9)	0.61126	0.1286(2)	0.009	
	0.31356147(3)	0.1950056(10)	0.62191	0.1286(2)	0.009	
	0.31356147(3)	0.197879(1)	0.63107	0.1286(2)	0.008	
09009	0.365666(9)	0.230207(1)	0.62956	0.12(1)	0.011	kand.
09017	0.27365999(3)	0.1678242(8)	0.61326	0.1383(3)	0.016	
09030	0.3234944(2)	0.198395(1)	0.61329	0.1242(9)	0.018	kand.
09041	0.32006284(4)	0.1967554(7)	0.61474	0.1461(3)	0.022	0.5 $f_x$
09056	0.29471307(6)	0.180906(1)	0.61384	0.1331(5)	0.024	
09126	0.32398909(3)	0.2013770(7)	0.62155	0.1240(2)	0.017	
	0.32398909(3)	0.1984768(9)	0.6126	0.1240(2)	0.011	
09134	0.29693279(3)	0.1824143(7)	0.61433	0.1293(3)	0.024	
09153	0.28929274(4)	0.177752(1)	0.61444	0.1228(3)	0.013	
09163	0.29551923(4)	0.1810592(9)	0.61268	0.1160(3)	0.014	
09164	0.28639120(2)	0.1755787(4)	0.61307	0.1435(2)	0.015	
09201	0.30160851(3)	0.1841458(5)	0.61055	0.1324(3)	0.024	
09205	0.32121335(6)	0.199666(1)	0.6216	0.1193(4)	0.02	
	0.32121335(6)	0.196762(2)	0.61256	0.1193(4)	0.015	
	0.32121335(6)	0.202629(1)	0.63082	0.1193(4)	0.018	
09206	0.29500222(4)	0.1807227(7)	0.61261	0.1216(3)	0.021	
09212	0.234955620(10)	0.1443403(5)	0.61433	0.1246(2)	0.012	
09216	0.31039506(7)	0.1904603(9)	0.61361	0.1330(4)	0.023	
09249	0.30475025(3)	0.1878680(2)	0.61647	0.1133(2)	0.013	
09258	0.27766821(4)	0.175151(1)	0.63079	0.1013(2)	0.014	RRd
09264	0.30322692(4)	0.1879673(10)	0.61989	0.1288(3)	0.012	
09267	0.24987659(3)	0.1530163(5)	0.61237	0.1217(3)	0.021	

*Kontynuacja na następnnej stronie*



Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
09278	0.27352204(4)	0.1678805(7)	0.61377	0.1173(4)	0.026	kand.
09292	0.30442505(4)	0.185398(1)	0.60901	0.1401(3)	0.017	
09298	0.31963205(3)	0.1965480(5)	0.61492	0.1082(2)	0.013	$0.5f_x$
09300	0.32739840(5)	0.206285(1)	0.63007	0.0484(1)	0.021	$0.5f_x$ , kand.
09305	0.30294829(2)	0.1859437(3)	0.61378	0.1276(1)	0.024	
	0.30294829(2)	0.1885224(9)	0.62229	0.1276(1)	0.008	
09306	0.29495396(5)	0.181032(1)	0.61376	0.1378(4)	0.01	kand.
09341	0.31542622(3)	0.1922456(9)	0.60948	0.1252(2)	0.01	
09375	0.28790934(4)	0.1764221(9)	0.61277	0.1428(4)	0.018	
09387	0.27857884(2)	0.1710075(7)	0.61386	0.1484(3)	0.013	
09433	0.27294961(5)	0.1645013(7)	0.60268	0.1227(4)	0.016	
09436	0.33011156(6)	0.2022466(8)	0.61266	0.1216(3)	0.011	
09444	0.32376783(4)	0.204370(1)	0.63122	0.1250(3)	0.015	$0.5f_x$
	0.32376783(4)	0.198608(1)	0.61343	0.1250(3)	0.014	
	0.32376783(4)	0.204370(1)	0.63122	0.1250(3)	0.015	
09454	0.282806390(10)	0.1733403(4)	0.61293	0.1439(2)	0.018	
09481	0.31772067(5)	0.1950060(10)	0.61377	0.1237(4)	0.019	$0.5f_x$
	0.31772067(5)	0.197611(1)	0.62196	0.1237(4)	0.015	
09497	0.29119414(3)	0.178485(1)	0.61294	0.1420(3)	0.011	kand.
09510	0.31504286(5)	0.195750(1)	0.62134	0.1162(3)	0.015	
09511	0.30282659(3)	0.1897132(8)	0.62647	0.1099(2)	0.01	
09520	0.24892788(2)	0.1528190(7)	0.61391	0.1091(2)	0.013	
09521	0.32317475(3)	0.198180(1)	0.61323	0.1147(2)	0.008	$0.5f_x$
	0.32317475(3)	0.200907(1)	0.62167	0.1147(2)	0.008	
	0.32317475(3)	0.203790(1)	0.63059	0.1147(2)	0.007	
09529	0.30692883(2)	0.18709572(8)	0.60957	0.1254(1)	0.024	
09578	0.30527835(3)	0.1865925(9)	0.61122	0.1342(2)	0.013	
	0.30527835(3)	0.192381(1)	0.63018	0.1342(2)	0.01	
09594	0.32046610(4)	0.2022054(8)	0.63097	0.1222(2)	0.017	$0.5f_x$
	0.32046610(4)	0.199301(1)	0.62191	0.1222(2)	0.013	
09598	0.32928412(5)	0.207587(2)	0.63042	0.1077(2)	0.009	
09616	0.3428505(3)	0.215927(2)	0.6298	0.093(1)	0.075	kand.
09620	0.29163358(5)	0.1788822(5)	0.61338	0.1320(4)	0.036	
09631	0.280272690(10)	0.1723691(6)	0.615	0.1464(1)	0.009	
09637	0.29648222(4)	0.181560(1)	0.61238	0.1398(4)	0.014	
09647	0.26891630(4)	0.1703260(8)	0.63338	0.0869(3)	0.02	$0.5f_x$
	0.26891630(4)	0.1690018(9)	0.62846	0.0869(3)	0.016	
09649	0.30892587(5)	0.1898070(8)	0.61441	0.1160(3)	0.025	
09656	0.42506764(7)	0.265487(1)	0.62458	0.0998(2)	0.018	kand.
09665	0.29925226(6)	0.1835184(9)	0.61326	0.1174(4)	0.028	
09696	0.308380360(10)	0.1877204(9)	0.60873	0.1107(1)	0.004	
09703	0.29850683(5)	0.182792(2)	0.61235	0.1193(3)	0.017	
09733	0.31378022(3)	0.1921045(2)	0.61223	0.1213(2)	0.013	$0.5f_x$
	0.31378022(3)	0.197952(2)	0.63086	0.1213(2)	0.012	

*Kontynuacja na następnnej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
09749	0.32134035(4)	0.196237(1)	0.61068	0.1239(2)	0.01	
09771	0.26098423(3)	0.1599148(7)	0.61274	0.1232(3)	0.016	
09787	0.35051026(6)	0.219962(2)	0.62755	0.1066(3)	0.014	
09795	0.31619057(2)	0.1943701(9)	0.61472	0.1584(2)	0.006	
09809	0.29856692(3)	0.1830241(7)	0.61301	0.1461(3)	0.011	
09811	0.31326458(3)	0.1920059(4)	0.61292	0.1237(2)	0.016	bl
	0.31326458(3)	0.1947839(6)	0.62179	0.1237(2)	0.012	
09813	0.30360388(3)	0.186154(1)	0.61315	0.1265(2)	0.013	
09825	0.34397868(3)	0.2116645(5)	0.61534	0.1296(1)	0.021	
09868	0.29430171(3)	0.1804498(4)	0.61315	0.1362(2)	0.023	bl
09891	0.31104277(4)	0.1905705(10)	0.61268	0.1329(3)	0.011	
	0.31104277(4)	0.194075(1)	0.62395	0.1329(3)	0.011	
09892	0.35423124(7)	0.216563(2)	0.61136	0.1358(2)	0.008	
09920	0.32702140(7)	0.200109(1)	0.61191	0.1349(4)	0.012	kand.
09927	0.29450670(3)	0.1809330(8)	0.61436	0.1341(3)	0.016	
09929	0.29916617(2)	0.1834687(5)	0.61327	0.1261(2)	0.02	
09933	0.27949519(6)	0.1735978(9)	0.62111	0.1132(4)	0.019	
	0.27949519(6)	0.1765930(8)	0.63183	0.1132(4)	0.016	
09977	0.28851306(2)	0.1773083(7)	0.61456	0.1352(2)	0.01	
09985	0.31675326(4)	0.1970058(8)	0.62195	0.1297(3)	0.016	0.5 $f_x$
	0.31675326(4)	0.1942740(10)	0.61333	0.1297(3)	0.012	
09987	0.28091096(2)	0.1728011(8)	0.61515	0.1489(2)	0.009	
09988	0.30615695(7)	0.187003(1)	0.61081	0.1276(5)	0.02	
10000	0.29739041(3)	0.1820431(7)	0.61214	0.1287(3)	0.024	
10008	0.30434827(5)	0.1872793(6)	0.61535	0.1281(4)	0.022	
10037	0.32979605(2)	0.2077514(4)	0.62994	0.1311(1)	0.021	0.5 $f_x$
	0.32979605(2)	0.2079973(7)	0.63068	0.1311(1)	0.014	
10040	0.31351304(3)	0.1922984(8)	0.61337	0.1316(2)	0.011	
10056	0.29856514(5)	0.1833661(7)	0.61416	0.1256(3)	0.03	
10061	0.26253029(4)	0.1602975(4)	0.61059	0.0614(2)	0.042	
10076	0.32133078(6)	0.1972129(8)	0.61374	0.1274(4)	0.024	
10087	0.29580701(3)	0.1812962(6)	0.61289	0.1359(2)	0.018	
10116	0.27567307(3)	0.169064(1)	0.61328	0.1268(3)	0.017	
10119	0.31540045(3)	0.199050(1)	0.6311	0.1148(2)	0.012	
	0.31540045(3)	0.193523(1)	0.61358	0.1148(2)	0.011	
	0.31540045(3)	0.196063(1)	0.62163	0.1148(2)	0.01	
10121	0.3159374(2)	0.193770(2)	0.61332	0.1224(5)	0.016	
10126	0.25334599(9)	0.155111(1)	0.61225	0.0969(6)	0.032	kand.
10134	0.31201373(3)	0.1925866(6)	0.61724	0.1317(2)	0.014	
10145	0.3222939(2)	0.197441(1)	0.61261	0.1244(9)	0.018	
10150	0.32642369(4)	0.205507(2)	0.62957	0.1295(3)	0.008	0.5 $f_x$
	0.32642369(4)	0.205665(2)	0.63006	0.1295(3)	0.008	
10184	0.31114642(4)	0.1900107(7)	0.61068	0.1298(3)	0.016	
	0.31114642(4)	0.196075(1)	0.63017	0.1298(3)	0.01	

*Kontynuacja na następczej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
10187	0.35272129(6)	0.221273(1)	0.62733	0.1154(3)	0.016	$0.5f_x$
10230	0.31078131(4)	0.1906684(2)	0.61351	0.1270(3)	0.029	
10244	0.31346263(3)	0.1922358(5)	0.61327	0.1237(2)	0.023	
10253	0.29657997(2)	0.1816522(6)	0.61249	0.1554(2)	0.014	
10257	0.31198004(3)	0.1911386(7)	0.61266	0.1265(2)	0.017	$0.5f_x$
10262	0.316221310(10)	0.199536(5)	0.631	0.1129(2)	0.018	
	0.316221310(10)	0.19401(1)	0.61353	0.1129(2)	0.009	
	0.316221310(10)	0.199536(5)	0.631	0.1129(2)	0.018	
10275	0.28162771(2)	0.173175(1)	0.61491	0.1365(2)	0.012	bl
10289	0.30849841(8)	0.188907(1)	0.61234	0.1290(5)	0.019	
10296	0.37242529(7)	0.227177(2)	0.60999	0.1187(3)	0.008	
10308	0.30966512(4)	0.190125(1)	0.61397	0.1242(2)	0.014	
10316	0.24231389(4)	0.1485661(9)	0.61311	0.1140(4)	0.018	
10320	0.32335494(5)	0.197938(1)	0.61214	0.1186(3)	0.017	
10323	0.31555429(3)	0.1935619(8)	0.6134	0.1221(2)	0.014	
10338	0.33789403(3)	0.2126097(10)	0.62922	0.1285(2)	0.011	$0.5f_x$
	0.33789403(3)	0.2134688(9)	0.63176	0.1285(2)	0.011	
10350	0.30033053(5)	0.1891142(10)	0.62969	0.1107(3)	0.014	kand.
10352	0.29856803(3)	0.1834115(6)	0.6143	0.1303(2)	0.02	
10361	0.31361371(3)	0.1920109(4)	0.61225	0.1227(1)	0.013	
	0.31361371(3)	0.194743(1)	0.62096	0.1227(1)	0.01	
10366	0.29588318(5)	0.1817827(8)	0.61437	0.1288(4)	0.023	
10369	0.32170650(5)	0.203250(2)	0.63179	0.1126(3)	0.012	RRd
10371	0.289345890(10)	0.177505(2)	0.61347	0.1359(1)	0.015	
10378	0.25471704(2)	0.1563983(4)	0.61401	0.0962(1)	0.019	
10380	0.28001463(3)	0.172271(1)	0.61522	0.1489(3)	0.011	
10396	0.32214186(3)	0.1973254(9)	0.61254	0.1180(2)	0.01	
10398	0.30264669(3)	0.1851273(8)	0.61169	0.1258(2)	0.023	
10403	0.30535610(3)	0.1868309(9)	0.61185	0.1567(3)	0.011	
10413	0.34605753(4)	0.211788(1)	0.612	0.1375(2)	0.008	
10425	0.3201621(2)	0.1965502(7)	0.61391	0.1299(3)	0.024	
10426	0.30200465(4)	0.1851452(10)	0.61305	0.1276(3)	0.016	
10445	0.30371431(6)	0.186197(1)	0.61307	0.1377(8)	0.013	
10447	0.31187343(2)	0.1909987(7)	0.61242	0.1209(2)	0.015	
10458	0.32412262(6)	0.201561(2)	0.62187	0.1223(4)	0.013	
10467	0.28446855(7)	0.1743336(5)	0.61284	0.1389(2)	0.019	
10511	0.37342673(7)	0.233405(2)	0.62504	0.1024(3)	0.013	
10534	0.31529923(3)	0.1934537(7)	0.61356	0.1111(1)	0.014	$0.5f_x$
	0.31529923(3)	0.1959797(8)	0.62157	0.1111(1)	0.009	
	0.31529923(3)	0.1991058(7)	0.63148	0.1111(1)	0.012	
10541	0.32542169(6)	0.206105(2)	0.63335	0.1301(4)	0.014	
10543	0.34334765(2)	0.2101539(7)	0.61207	0.14430(10)	0.008	
10549	0.28611102(3)	0.1754882(4)	0.61336	0.1372(3)	0.026	
10554	0.2996659(2)	0.1836414(8)	0.61282	0.1117(8)	0.013	

*Kontynuacja na następnnej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
10565	0.2459469(1)	0.1494820(7)	0.60778	0.0926(8)	0.021	
10566	0.31183172(8)	0.191062(2)	0.61271	0.1275(5)	0.016	
10587	0.28296282(3)	0.174229(1)	0.61573	0.1470(3)	0.01	
10597	0.29134346(5)	0.1792114(9)	0.61512	0.1416(5)	0.02	
10614	0.31448656(4)	0.1925720(9)	0.61234	0.1167(2)	0.014	
	0.31448656(4)	0.195584(1)	0.62192	0.1167(2)	0.012	
	0.31448656(4)	0.198513(1)	0.63123	0.1167(2)	0.01	
10627	0.29039790(5)	0.178389(1)	0.61429	0.1521(4)	0.013	
10643	0.30572141(10)	0.187242(1)	0.61246	0.1190(6)	0.014	
10653	0.3273004(2)	0.201264(2)	0.61492	0.107(1)	0.032	
10663	0.276997300(10)	0.1697823(7)	0.61294	0.0859(3)	0.024	
10665	0.31955224(7)	0.201717(2)	0.63125	0.1307(4)	0.016	
10675	0.31939810(5)	0.200920(1)	0.62906	0.1263(7)	0.025	
10685	0.30007336(3)	0.1841198(5)	0.61358	0.1316(2)	0.02	
	0.30007336(3)	0.1867025(10)	0.62219	0.1316(2)	0.009	
10724	0.28130622(2)	0.1725182(10)	0.61328	0.1428(6)	0.017	kand.
10733	0.29313633(6)	0.1801633(5)	0.61461	0.1325(4)	0.023	kand.
10744	0.35576412(8)	0.218500(2)	0.61417	0.1279(4)	0.019	RRd
10747	0.31793074(5)	0.1976417(3)	0.62165	0.1226(2)	0.017	0.5 $f_x$
	0.31793074(5)	0.1947846(6)	0.61266	0.1226(2)	0.015	
	0.31793074(5)	0.2005261(9)	0.63072	0.1226(2)	0.011	
10756	0.2965903(2)	0.182217(1)	0.61437	0.1432(7)	0.014	
10760	0.30134275(5)	0.184586(1)	0.61255	0.1373(4)	0.018	
10771	0.31628683(5)	0.193939(1)	0.61317	0.1205(3)	0.015	
10787	0.27650842(4)	0.1696608(8)	0.61358	0.1092(3)	0.018	
10789	0.31145344(7)	0.190693(10)	0.61227	0.1233(4)	0.081	
10793	0.28357416(4)	0.1738193(10)	0.61296	0.1431(3)	0.011	
10795	0.30200831(4)	0.1853230(5)	0.61364	0.1247(2)	0.026	
10796	0.31909935(4)	0.1954256(8)	0.61243	0.1200(2)	0.015	RRd, 0.5 $f_x$
	0.31909935(4)	0.198505(1)	0.62208	0.1200(2)	0.011	
	0.31909935(4)	0.201310(1)	0.63087	0.1200(2)	0.010	
10818	0.26327469(4)	0.1612516(6)	0.61248	0.1025(2)	0.015	
10825	0.31695649(3)	0.1942610(8)	0.61289	0.1202(2)	0.015	0.5 $f_x$
	0.31695649(3)	0.1970008(8)	0.62154	0.1202(2)	0.017	
10851	0.29511973(7)	0.180820(1)	0.6127	0.1276(5)	0.019	
10857	0.24375427(2)	0.1500403(7)	0.61554	0.1195(2)	0.013	
10869	0.30187980(5)	0.184652(1)	0.61167	0.1354(4)	0.016	
10902	0.33176630(3)	0.209522(1)	0.63153	0.1379(2)	0.009	0.5 $f_x$
10914	0.33143607(3)	0.202229(1)	0.61016	0.1539(2)	0.008	
10954	0.23666005(4)	0.144831(2)	0.61198	0.0885(3)	0.029	
10960	0.27924643(5)	0.1711860(9)	0.61303	0.1477(2)	0.007	
10968	0.32060825(7)	0.199254(1)	0.62149	0.1245(4)	0.014	
	0.32060825(7)	0.196359(2)	0.61246	0.1245(4)	0.01	
10980	0.29690954(8)	0.182435(1)	0.61445	0.0616(3)	0.021	kand.

*Kontynuacja na następczej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
10988	0.28179202(2)	0.1732004(9)	0.61464	0.1534(3)	0.01	
11005	0.28140860(3)	0.1728788(7)	0.61433	0.1325(2)	0.009	
11015	0.28957510(2)	0.1776282(8)	0.61341	0.1317(1)	0.018	
11017	0.26183405(3)	0.1603990(7)	0.6126	0.1365(3)	0.015	
11043	0.30032723(7)	0.183046(1)	0.60949	0.1270(5)	0.017	
11062	0.3375229(1)	0.212858(2)	0.63065	0.1155(5)	0.01	kand.
11063	0.28947151(5)	0.1778433(9)	0.61437	0.1376(4)	0.02	
11068	0.29720790(3)	0.1822595(7)	0.61324	0.1248(2)	0.02	
11072	0.31601750(4)	0.199391(1)	0.63095	0.1253(2)	0.012	0.5 $f_x$
	0.31601750(4)	0.193847(2)	0.61341	0.1253(2)	0.011	
11097	0.30815806(7)	0.1907513(10)	0.619	0.1232(4)	0.011	
11107	0.30865448(2)	0.1891751(5)	0.6129	0.1249(1)	0.022	
	0.30865448(2)	0.192165(1)	0.62259	0.1249(1)	0.009	
11109	0.31716288(6)	0.194282(1)	0.61256	0.1175(3)	0.015	
11112	0.33175364(4)	0.208590(1)	0.62875	0.1319(2)	0.007	
11119	0.27956130(2)	0.1715814(7)	0.61375	0.1362(2)	0.01	
11126	0.30215331(6)	0.185023(1)	0.61235	0.1264(4)	0.017	
11136	0.31712352(3)	0.1943666(8)	0.61291	0.1249(2)	0.014	0.5 $f_x$
	0.31712352(3)	0.197224(2)	0.62192	0.1249(2)	0.014	
	0.31712352(3)	0.200332(1)	0.63172	0.1249(2)	0.008	
11151	0.29670197(4)	0.1822379(10)	0.61421	0.1263(3)	0.017	
11153	0.28868401(6)	0.1771742(9)	0.61373	0.1293(5)	0.017	
11162	0.29134904(6)	0.178741(5)	0.61349	0.114(1)	0.016	
	0.29134904(6)	0.185663(1)	0.63725	0.114(1)	0.011	
11186	0.30101587(6)	0.184773(1)	0.61383	0.1312(5)	0.019	kand.
11193	0.36260234(2)	0.2208207(8)	0.60899	0.14652(10)	0.007	0.5 $f_x$
11197	0.32276003(4)	0.203469(1)	0.6304	0.1329(2)	0.014	
11220	0.27469620(4)	0.1682510(7)	0.6125	0.1436(4)	0.016	
11225	0.30255149(4)	0.1851302(5)	0.6119	0.1269(3)	0.026	
11234	0.35300247(8)	0.216754(2)	0.61403	0.1333(4)	0.014	RRd
11239	0.32628659(4)	0.2006170(3)	0.61485	0.1504(2)	0.013	
11249	0.30349768(4)	0.1861912(10)	0.61348	0.1284(3)	0.011	
11257	0.31696424(4)	0.194167(1)	0.61258	0.1141(2)	0.012	0.5 $f_x$
11260	0.30636461(6)	0.187669(1)	0.61257	0.1260(4)	0.018	
11263	0.35804243(5)	0.2247024(7)	0.62759	0.1348(2)	0.016	0.5 $f_x$
	0.35804243(5)	0.2209425(7)	0.61708	0.1348(2)	0.014	
11270	0.2931183(1)	0.182708(1)	0.62333	0.1322(10)	0.024	kand.
11281	0.31538481(4)	0.195059(1)	0.61848	0.1266(3)	0.009	
11293	0.28490771(4)	0.175366(1)	0.61552	0.1399(3)	0.012	
11299	0.31962796(6)	0.195443(1)	0.61147	0.1249(4)	0.014	kand.
11318	0.28426071(2)	0.1745236(5)	0.61396	0.1474(2)	0.016	
11339	0.30943246(4)	0.1898592(6)	0.61357	0.1190(2)	0.022	0.5 $f_x$
	0.30943246(4)	0.192407(1)	0.62181	0.1190(2)	0.011	
	0.30943246(4)	0.195337(2)	0.63128	0.1190(2)	0.009	

*Kontynuacja na następnnej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
11348	0.3075237(2)	0.1884152(6)	0.61269	0.1217(9)	0.011	
11384	0.35041096(6)	0.216487(1)	0.61781	0.1239(3)	0.019	
11394	0.39402890(6)	0.243397(2)	0.61771	0.1486(7)	0.011	kand.
11440	0.29242966(5)	0.179599(1)	0.61416	0.1269(4)	0.013	
11451	0.32962549(2)	0.203521(1)	0.61743	0.1232(3)	0.008	
	0.32962549(2)	0.205274(2)	0.62275	0.1232(3)	0.006	
11457	0.31576255(2)	0.199453(1)	0.63166	0.1402(1)	0.005	
11466	0.30935669(6)	0.1894216(10)	0.61231	0.1273(4)	0.016	
11474	0.32585655(7)	0.202544(1)	0.62157	0.1247(4)	0.013	
11490	0.3000787(1)	0.183958(1)	0.61303	0.1323(8)	0.029	kand.
11497	0.30793498(5)	0.188773(1)	0.61303	0.1274(5)	0.017	
11503	0.31097370(2)	0.1902592(4)	0.61182	0.1321(1)	0.017	
11533	0.27108944(3)	0.1685411(7)	0.62172	0.0908(2)	0.015	
	0.27108944(3)	0.1662300(7)	0.61319	0.0908(2)	0.014	
11539	0.33389316(3)	0.2107214(5)	0.6311	0.1328(2)	0.014	0.5 $f_x$
	0.33389316(3)	0.2092792(9)	0.62678	0.1328(2)	0.01	
11547	0.30619293(2)	0.1871226(6)	0.61113	0.1334(1)	0.018	
	0.30619293(2)	0.190180(1)	0.62111	0.1334(1)	0.01	
	0.30619293(2)	0.193095(1)	0.63063	0.1334(1)	0.009	
11559	0.30529110(5)	0.1873351(10)	0.61363	0.1316(3)	0.015	
11564	0.28032371(6)	0.172018(1)	0.61364	0.1213(4)	0.016	
11575	0.29661620(5)	0.181800(1)	0.61291	0.1271(4)	0.028	
11594	0.30000209(9)	0.184129(1)	0.61376	0.1110(5)	0.018	
11599	0.35037715(9)	0.2197132(6)	0.62708	0.1101(4)	0.015	
11615	0.36799364(4)	0.2211492(8)	0.60096	0.1596(2)	0.006	kand.
11621	0.31723543(4)	0.1971649(10)	0.62151	0.1184(2)	0.014	
	0.31723543(4)	0.194482(1)	0.61305	0.1184(2)	0.013	
	0.31723543(4)	0.2003121(10)	0.63143	0.1184(2)	0.014	
11641	0.32268682(3)	0.2034747(6)	0.63056	0.1354(2)	0.015	0.5 $f_x$
	0.32268682(3)	0.203186(1)	0.62967	0.1354(2)	0.008	
11671	0.31992500(6)	0.195872(1)	0.61224	0.1071(3)	0.018	
11673	0.25312719(2)	0.1551514(6)	0.61294	0.1331(2)	0.011	
11682	0.3284178(4)	0.208532(1)	0.63496	0.1313(2)	0.007	0.5 $f_x$
	0.3284178(4)	0.201097(1)	0.61232	0.1313(2)	0.006	
	0.3284178(4)	0.204639(2)	0.62311	0.1313(2)	0.006	
11684	0.30178720(5)	0.185309(1)	0.61404	0.1324(4)	0.014	
11687	0.29671591(3)	0.1817651(10)	0.61259	0.1431(2)	0.011	
11716	0.28835654(4)	0.176892(1)	0.61345	0.1379(4)	0.015	
11726	0.30194578(8)	0.184807(1)	0.61205	0.1212(5)	0.019	
11728	0.31518348(3)	0.193172(1)	0.61289	0.1204(1)	0.009	0.5 $f_x$
	0.31518348(3)	0.198961(1)	0.63125	0.1204(1)	0.008	
11744	0.33668044(6)	0.206833(1)	0.61433	0.1313(4)	0.013	
11761	0.30881091(5)	0.1893119(7)	0.61304	0.1291(3)	0.018	
11789	0.26796412(2)	0.1639653(5)	0.61189	0.1145(1)	0.016	

*Kontynuacja na następczej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
11843	0.29510274(2)	0.1804165(6)	0.61137	0.1339(2)	0.014	
11882	0.33676330(5)	0.211768(1)	0.62883	0.1190(3)	0.012	0.5 $f_x$
	0.33676330(5)	0.212870(2)	0.63211	0.1190(3)	0.011	
11888	0.29085810(5)	0.1787709(7)	0.61463	0.1210(4)	0.024	
11911	0.27016160(4)	0.1654728(5)	0.6125	0.1217(3)	0.01	kand.
11913	0.31835441(3)	0.1978616(6)	0.62151	0.1234(1)	0.016	0.5 $f_x$
	0.31835441(3)	0.1952227(9)	0.61322	0.1234(1)	0.014	
	0.31835441(3)	0.2009750(8)	0.63129	0.1234(1)	0.014	
11917	0.31332788(6)	0.192038(1)	0.6129	0.1229(3)	0.014	
11918	0.32338881(6)	0.1981339(6)	0.61268	0.1207(3)	0.017	
11929	0.31588788(5)	0.196545(1)	0.6222	0.1190(3)	0.017	
	0.31588788(5)	0.193735(1)	0.6133	0.1190(3)	0.013	
11937	0.29158962(3)	0.179031(1)	0.61398	0.1372(3)	0.01	
11940	0.29745121(3)	0.1826779(8)	0.61414	0.1272(3)	0.02	
11942	0.22410678(4)	0.1378743(5)	0.61522	0.0766(3)	0.031	
11944	0.32852428(4)	0.201154(1)	0.6123	0.1351(3)	0.007	
	0.32852428(4)	0.207394(1)	0.63129	0.1351(3)	0.007	
11945	0.33397005(4)	0.2097895(6)	0.62817	0.1094(2)	0.02	0.5 $f_x$
11946	0.27819496(2)	0.1708588(7)	0.61417	0.1488(2)	0.009	
11950	0.30609485(2)	0.1890767(10)	0.61771	0.1327(1)	0.009	
	0.30609485(2)	0.190494(1)	0.62234	0.1327(1)	0.008	
11951	0.33150132(3)	0.208033(1)	0.62755	0.1428(3)	0.01	0.5 $f_x$
11971	0.270646470(10)	0.1640809(4)	0.60626	0.1433(1)	0.01	
11976	0.31581013(4)	0.1936398(9)	0.61315	0.1158(2)	0.015	0.5 $f_x$
	0.31581013(4)	0.196329(1)	0.62167	0.1158(2)	0.01	
	0.31581013(4)	0.199341(1)	0.63121	0.1158(2)	0.011	
11980	0.31660450(3)	0.1968910(6)	0.62188	0.1240(2)	0.016	0.5 $f_x$
	0.31660450(3)	0.1941198(6)	0.61313	0.1240(2)	0.016	
11981	0.43938460(5)	0.270908(3)	0.61656	0.1143(1)	0.008	RRd, bl
11999	0.30944767(3)	0.189603(1)	0.61271	0.1470(3)	0.008	
12016	0.31169668(9)	0.193673(1)	0.62135	0.1232(6)	0.014	
12029	0.32052172(3)	0.1990895(6)	0.62114	0.1266(2)	0.017	0.5 $f_x$
12037	0.31908920(4)	0.2012350(8)	0.63065	0.1273(3)	0.019	
12050	0.32933833(2)	0.208283(1)	0.63243	0.1226(1)	0.007	
12057	0.3172949(1)	0.194373(1)	0.61259	0.1308(8)	0.033	
12065	0.34050387(7)	0.2099190(9)	0.6165	0.1150(3)	0.011	
12071	0.33047806(7)	0.207791(1)	0.62876	0.1137(4)	0.018	
	0.33047806(7)	0.208436(2)	0.63071	0.1137(4)	0.013	
12099	0.29871627(3)	0.1832166(5)	0.61335	0.1327(3)	0.014	
12113	0.31058606(2)	0.1892545(8)	0.60935	0.1303(1)	0.012	
12124	0.31224552(3)	0.1940110(9)	0.62134	0.1187(2)	0.013	
12127	0.28870492(3)	0.1773870(10)	0.61442	0.1438(3)	0.012	
12154	0.28682675(4)	0.1757207(9)	0.61264	0.1400(4)	0.013	
12160	0.30122636(3)	0.1851108(7)	0.61452	0.1321(4)	0.025	

*Kontynuacja na następnej stronie*



Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
12182	0.29601801(8)	0.1812245(7)	0.61221	0.1261(6)	0.02	bl
12226	0.29940839(6)	0.1836628(4)	0.61342	0.1288(4)	0.02	
12235	0.30416688(7)	0.186578(1)	0.61341	0.1224(4)	0.02	
12247	0.27994410(4)	0.172647(1)	0.61672	0.1495(4)	0.013	
12256	0.3184930(1)	0.2009065(7)	0.6308	0.1303(4)	0.013	
12257	0.31832443(4)	0.200860(1)	0.63099	0.1325(3)	0.015	
12261	0.30506798(2)	0.1868364(3)	0.61244	0.1284(1)	0.028	
	0.30506798(2)	0.1925181(8)	0.63107	0.1284(1)	0.01	
12263	0.32622315(3)	0.2002165(7)	0.61374	0.1097(1)	0.014	
12267	0.33840524(10)	0.2133009(8)	0.63031	0.1111(4)	0.014	
	0.33840524(10)	0.2130711(3)	0.62963	0.1111(4)	0.009	
12286	0.30980777(6)	0.189739(1)	0.61244	0.1365(4)	0.013	kand.
12295	0.29322906(4)	0.1796343(7)	0.61261	0.1394(3)	0.016	
12299	0.282418370(10)	0.1733697(2)	0.61388	0.1399(2)	0.007	
12306	0.29727054(8)	0.1826886(6)	0.61455	0.1341(5)	0.021	kand.
12311	0.28550049(2)	0.1748721(7)	0.61251	0.1340(2)	0.013	
12315	0.286810500(10)	0.1763490(6)	0.61486	0.1458(1)	0.01	
12324	0.29531340(7)	0.180900(1)	0.61257	0.1382(6)	0.02	
12335	0.4605875(4)	0.292300(3)	0.63462	0.0973(10)	0.028	kand.
12355	0.35181130(9)	0.216186(1)	0.61449	0.1432(6)	0.022	
12363	0.31900473(7)	0.1982551(6)	0.62148	0.1243(4)	0.014	
12369	0.26545416(3)	0.1624755(4)	0.61207	0.1125(2)	0.022	
12375	0.31915968(8)	0.198368(1)	0.62153	0.1269(5)	0.02	
12406	0.28154412(8)	0.172529(1)	0.6128	0.1105(5)	0.022	kand.
12414	0.27819884(2)	0.1708247(6)	0.61404	0.1476(2)	0.012	
12421	0.33805606(3)	0.2130284(9)	0.63016	0.1141(2)	0.014	0.5 $f_x$
	0.33805606(3)	0.212771(1)	0.6294	0.1141(2)	0.01	
12432	0.287155290(10)	0.1754099(5)	0.61085	0.08476(7)	0.01	
12434	0.29426773(2)	0.1807983(5)	0.6144	0.1285(2)	0.02	
12439	0.295584400(10)	0.1815171(3)	0.6141	0.1449(1)	0.021	
12445	0.34370588(4)	0.210842(1)	0.61344	0.1214(2)	0.008	
12457	0.29025537(2)	0.1776622(5)	0.61209	0.1443(2)	0.015	
12467	0.32027826(4)	0.1991096(9)	0.62168	0.1180(2)	0.02	0.5 $f_x$
	0.32027826(4)	0.1961614(8)	0.61247	0.1180(2)	0.015	
12481	0.30570649(3)	0.1874013(3)	0.61301	0.1319(2)	0.045	
12492	0.32190925(7)	0.196973(2)	0.61189	0.1251(4)	0.012	kand.
12509	0.34522697(8)	0.211293(1)	0.61204	0.1283(4)	0.009	
12528	0.32416290(4)	0.2049759(9)	0.63232	0.1249(2)	0.01	
12534	0.26476896(5)	0.1625541(8)	0.61395	0.1071(4)	0.014	
12539	0.30799589(4)	0.187221(1)	0.60787	0.1197(3)	0.009	
	0.30799589(4)	0.1927168(10)	0.62571	0.1197(3)	0.01	
12549	0.31012872(7)	0.190781(1)	0.61517	0.1248(4)	0.016	
12567	0.32336079(4)	0.1980317(9)	0.61242	0.1232(2)	0.011	
12570	0.29167537(5)	0.1790998(8)	0.61404	0.1381(4)	0.021	

*Kontynuacja na następnnej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
12574	0.24535126(2)	0.1505015(6)	0.61341	0.1216(2)	0.011	
12582	0.31321036(4)	0.1921434(10)	0.61346	0.1290(3)	0.013	
12640	0.31421950(3)	0.1983429(9)	0.63122	0.1117(1)	0.012	
12646	0.31687062(3)	0.19705(1)	0.62186	0.1143(2)	0.012	0.5 $f_x$
	0.31687062(3)	0.1941832(8)	0.61282	0.1143(2)	0.01	
12653	0.2719433(1)	0.171915(1)	0.63217	0.1255(4)	0.023	
12663	0.31303208(7)	0.191935(5)	0.61315	0.1209(4)	0.017	
12672	0.235402040(10)	0.144570(1)	0.61414	0.0966(1)	0.033	
12686	0.29624091(2)	0.1820252(6)	0.61445	0.1356(1)	0.026	
12697	0.37628587(7)	0.229622(2)	0.61023	0.1039(2)	0.008	
12723	0.249187140(10)	0.1532521(3)	0.61501	0.1240(1)	0.016	
12769	0.31341085(2)	0.1921129(6)	0.61297	0.1254(1)	0.021	0.5 $f_x$
	0.31341085(2)	0.1950164(7)	0.62224	0.1254(1)	0.013	
	0.31341085(2)	0.1978961(8)	0.63143	0.1254(1)	0.01	
12776	0.31535057(2)	0.1936490(3)	0.61408	0.1302(1)	0.01	0.5 $f_x$
	0.31535057(2)	0.1959375(7)	0.62133	0.1302(1)	0.007	
	0.31535057(2)	0.1990300(5)	0.63114	0.1302(1)	0.007	
12823	0.29009132(5)	0.178470(1)	0.61522	0.1529(6)	0.017	
12828	0.32729450(5)	0.200351(1)	0.61214	0.1227(3)	0.011	
12829	0.32213541(8)	0.203257(2)	0.63097	0.1268(5)	0.014	
12831	0.28804298(5)	0.176666(1)	0.61333	0.1269(7)	0.023	
12845	0.274383150(10)	0.165981(2)	0.60492	0.1477(1)	0.007	
12878	0.268720250(10)	0.161104(1)	0.59952	0.1550(1)	0.005	
12883	0.28626854(5)	0.175844(1)	0.61426	0.1282(4)	0.012	kand.
12921	0.28454394(3)	0.174665(1)	0.61384	0.1351(3)	0.016	
12944	0.30277364(3)	0.1858722(1)	0.6139	0.1286(2)	0.039	
12951	0.23228839(2)	0.1425174(6)	0.61354	0.1177(2)	0.014	
12972	0.32094619(3)	0.1965611(8)	0.61244	0.1208(1)	0.012	0.5 $f_x$
	0.32094619(3)	0.1992075(9)	0.62069	0.1208(1)	0.011	
	0.32094619(3)	0.202334(1)	0.63043	0.1208(1)	0.009	
12984	0.36126930(2)	0.2267288(10)	0.62759	0.1292(2)	0.014	0.5 $f_x$
12989	0.30680146(8)	0.188014(1)	0.61282	0.1346(5)	0.012	
13003	0.30888388(8)	0.189648(1)	0.61398	0.1236(5)	0.026	kand.
13008	0.34044133(9)	0.209252(2)	0.61465	0.1441(4)	0.019	
	0.34044133(9)	0.212040(5)	0.62284	0.1441(4)	0.015	
13021	0.28573086(2)	0.1747994(8)	0.61176	0.1274(2)	0.009	
13071	0.3125351(2)	0.191635(2)	0.61316	0.1213(8)	0.042	kand.
13099	0.28071469(3)	0.1721670(8)	0.61332	0.1497(2)	0.01	
13117	0.32160835(8)	0.199955(2)	0.62173	0.1275(5)	0.018	kand.
13129	0.3114412(1)	0.1908630(8)	0.61284	0.1209(3)	0.025	
13136	0.27939720(4)	0.1712980(10)	0.6131	0.1130(3)	0.016	kand.
13153	0.3224849(2)	0.2042081(10)	0.63323	0.0674(5)	0.042	0.5 $f_x$
13156	0.31633834(3)	0.193936(5)	0.61307	0.1238(2)	0.015	0.5 $f_x$
	0.31633834(3)	0.196753(3)	0.62197	0.1238(2)	0.008	

*Kontynuacja na następnnej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
	0.31633834(3)	0.19973(3)	0.63138	0.1238(2)	0.008	
13169	0.29192497(6)	0.1795010(9)	0.61489	0.1320(5)	0.022	
13172	0.34356909(3)	0.210475(1)	0.61261	0.1448(2)	0.007	
13184	0.31028552(5)	0.189819(1)	0.61176	0.1312(4)	0.021	
13194	0.22781277(6)	0.1399038(5)	0.61412	0.0874(6)	0.041	
13198	0.32174412(5)	0.203208(2)	0.63159	0.1283(3)	0.011	RRd, $0.5f_x$
13204	0.274348180(10)	0.1687579(6)	0.61512	0.1363(1)	0.009	
13247	0.29538529(8)	0.181518(1)	0.61451	0.1264(5)	0.024	
13253	0.32589718(4)	0.205554(1)	0.63073	0.1200(4)	0.021	bl
13256	0.28843329(4)	0.1765769(3)	0.61219	0.1288(2)	0.019	
13269	0.29716033(3)	0.1817754(5)	0.61171	0.1307(3)	0.033	
13328	0.31800927(6)	0.194913(2)	0.61292	0.1172(3)	0.02	bl
13332	0.22839511(3)	0.1405923(8)	0.61557	0.1296(3)	0.01	kand.
13400	0.31896055(6)	0.201170(1)	0.6307	0.1244(4)	0.015	
	0.31896055(6)	0.195499(1)	0.61293	0.1244(4)	0.015	
13401	0.30024725(5)	0.1838344(7)	0.61228	0.1334(4)	0.021	
13422	0.30211517(3)	0.1849646(9)	0.61223	0.1319(3)	0.017	
13455	0.31186177(8)	0.191189(1)	0.61306	0.1160(5)	0.022	
13459	0.28662699(3)	0.1755890(10)	0.6126	0.1214(3)	0.012	kand.
13472	0.28588058(5)	0.1751567(10)	0.61269	0.1417(8)	0.025	
13518	0.28585552(5)	0.1755654(10)	0.61418	0.1419(4)	0.013	
13536	0.23177010(4)	0.1427053(2)	0.61572	0.1025(4)	0.017	
13540	0.31699113(3)	0.200027(1)	0.63102	0.1430(3)	0.009	
13550	0.32117112(6)	0.196798(1)	0.61275	0.1291(4)	0.015	
13567	0.30632006(5)	0.187580(1)	0.61237	0.1344(4)	0.018	bl
	0.30632006(5)	0.190237(1)	0.62104	0.1344(4)	0.015	
	0.30632006(5)	0.193192(1)	0.63069	0.1344(4)	0.015	
13648	0.30634813(4)	0.1879412(8)	0.61349	0.1338(3)	0.013	
13666	0.30495950(6)	0.192597(1)	0.63155	0.1260(4)	0.022	RRd, $0.5f_x$
13708	0.31371432(4)	0.192259(1)	0.61285	0.1249(3)	0.01	
	0.31371432(4)	0.195183(1)	0.62217	0.1249(3)	0.014	
13717	0.24396592(5)	0.1494468(6)	0.61257	0.1062(4)	0.024	
13721	0.3393893(6)	0.215822(2)	0.63591	0.162(5)	0.142	RRd
13724	0.28331525(4)	0.173741(1)	0.61324	0.1496(4)	0.014	
13740	0.32459764(7)	0.205000(1)	0.63155	0.1242(5)	0.021	$0.5f_x$
13758	0.29702302(4)	0.184318(1)	0.62055	0.1269(3)	0.009	kand.
13771	0.35469654(4)	0.21695(1)	0.61165	0.1281(5)	0.012	
13870	0.37661917(7)	0.229416(2)	0.60915	0.1446(4)	0.01	kand.
13885	0.25128493(8)	0.151945(1)	0.60467	0.1015(6)	0.025	
13889	0.28088012(3)	0.1721219(4)	0.61279	0.1481(4)	0.018	
13892	0.28729088(5)	0.1760587(7)	0.61282	0.1359(5)	0.024	
13981	0.30351522(6)	0.1855141(9)	0.61122	0.1237(4)	0.021	
13989	0.28837244(3)	0.177357(1)	0.61503	0.1382(6)	0.015	$0.5f_x$
14013	0.31991585(6)	0.198815(1)	0.62146	0.1043(3)	0.014	kand.

*Kontynuacja na następnnej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
14029	0.31798614(6)	0.194845(1)	0.61275	0.1164(3)	0.016	RRd
14031	0.42976527(2)	0.2657970(5)	0.61847	0.1183(5)	0.018	RRd
14098	0.31356509(6)	0.191782(2)	0.61162	0.1283(4)	0.014	kand.
14120	0.29647439(9)	0.182136(1)	0.61434	0.1339(7)	0.027	
14130	0.26985234(9)	0.172523(1)	0.63932	0.0617(4)	0.031	kand.
14190	0.31324308(8)	0.1921395(7)	0.61339	0.1183(5)	0.02	
14263	0.3125081(1)	0.194783(2)	0.62329	0.1269(7)	0.02	
14292	0.3127711(1)	0.199451(1)	0.63769	0.131(1)	0.053	
14301	0.31423738(6)	0.1954784(7)	0.62207	0.1182(4)	0.019	
	0.31423738(6)	0.1925942(4)	0.61289	0.1182(4)	0.016	
14355	0.30234812(6)	0.185092(1)	0.61218	0.1189(4)	0.014	
14356	0.28429554(5)	0.174815(1)	0.61491	0.1439(5)	0.017	
14392	0.34160952(7)	0.209830(2)	0.61424	0.1494(5)	0.024	
14404	0.2453836(1)	0.1501966(9)	0.61209	0.0906(8)	0.049	kand.
14430	0.30560010(8)	0.1867139(9)	0.61097	0.1140(6)	0.032	
14462	0.27733361(2)	0.170075(7)	0.61325	0.1471(3)	0.014	
14467	0.26591246(5)	0.1632927(3)	0.61408	0.1084(3)	0.024	
14498	0.29350230(8)	0.179632(1)	0.61203	0.1301(6)	0.023	
14502	0.29470583(6)	0.180837(1)	0.61362	0.1292(4)	0.016	kand.
14510	0.29828126(8)	0.1831414(9)	0.61399	0.1274(6)	0.029	
14529	0.32719812(5)	0.206723(2)	0.6318	0.1312(3)	0.01	
14572	0.2224972(2)	0.1366192(2)	0.61403	0.0416(2)	0.108	
14609	0.3015711(2)	0.1843810(10)	0.6114	0.1281(4)	0.02	
14632	0.29903757(7)	0.183557(1)	0.61383	0.1346(5)	0.018	
14661	0.28632290(6)	0.1807600(7)	0.63132	0.1161(4)	0.011	
14669	0.30057306(10)	0.1841269(10)	0.61259	0.1303(6)	0.031	
14677	0.295202750(10)	0.1811998(10)	0.61381	0.1249(3)	0.014	
14687	0.27104250(5)	0.1662652(7)	0.61343	0.1097(4)	0.035	
14698	0.33536355(9)	0.206085(1)	0.61451	0.1276(5)	0.018	
14728	0.25342427(6)	0.1553944(9)	0.61318	0.0891(4)	0.021	kand.
14731	0.33148600(4)	0.202922(1)	0.61216	0.1452(3)	0.018	
14735	0.31390726(6)	0.192481(2)	0.61318	0.1304(4)	0.015	0.5 $f_x$
14744	0.29256610(6)	0.179124(1)	0.61225	0.1354(5)	0.018	
14781	0.3540654(2)	0.217199(2)	0.61344	0.144(1)	0.01	
14826	0.29329512(5)	0.180202(1)	0.61441	0.1361(5)	0.015	kand.
14917	0.30481158(5)	0.1867447(8)	0.61266	0.1272(4)	0.022	
14920	0.23417782(7)	0.1434989(6)	0.61278	0.1005(6)	0.023	
14998	0.28782324(5)	0.176488(1)	0.61318	0.1415(4)	0.016	
15047	0.29429323(5)	0.181090(1)	0.61534	0.1245(3)	0.016	
15072	0.31749585(6)	0.197340(1)	0.62155	0.1242(3)	0.015	0.5 $f_x$
	0.31749585(6)	0.194507(2)	0.61263	0.1242(3)	0.01	
15087	0.31771047(6)	0.194775(1)	0.61306	0.1110(4)	0.016	kand.
15093	0.25616024(3)	0.1574156(8)	0.61452	0.1366(3)	0.012	
15101	0.22759112(5)	0.1395556(7)	0.61319	0.1229(4)	0.016	kand.

*Kontynuacja na następczej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
15130	0.28628662(4)	0.174935(1)	0.61105	0.1505(5)	0.011	
15144	0.3110454(1)	0.1907822(9)	0.61336	0.1238(8)	0.028	
15185	0.32577414(8)	0.199458(1)	0.61226	0.1276(4)	0.015	
15220	0.29835484(9)	0.182865(1)	0.61291	0.1239(6)	0.026	kand.
15228	0.28294406(6)	0.1736539(5)	0.61374	0.1355(4)	0.016	
15237	0.28124366(4)	0.1727120(8)	0.6141	0.1374(4)	0.02	
15270	0.29980091(5)	0.183681(1)	0.61268	0.1209(4)	0.016	
15314	0.28516495(7)	0.1741990(7)	0.61087	0.1016(5)	0.029	
15345	0.30991656(5)	0.190827(1)	0.61574	0.1503(3)	0.01	kand.
15365	0.2519250(1)	0.1544786(9)	0.61319	0.0836(6)	0.035	
15427	0.33191744(6)	0.203008(1)	0.61162	0.1416(3)	0.015	
15451	0.29277057(5)	0.179583(1)	0.61339	0.1386(4)	0.014	kand.
15488	0.25705520(8)	0.1571860(7)	0.61149	0.1046(6)	0.04	
15534	0.2920620(2)	0.179403(2)	0.61426	0.1379(8)	0.029	
15544	0.31902847(10)	0.196177(1)	0.61492	0.1247(7)	0.032	
15624	0.30180310(5)	0.1851445(8)	0.61346	0.1265(4)	0.018	
15672	0.25924536(7)	0.1594204(10)	0.61494	0.1137(5)	0.025	
15791	0.30512111(7)	0.187059(2)	0.61306	0.1153(5)	0.029	
15812	0.32555808(9)	0.1994035(5)	0.6125	0.1240(6)	0.02	
15873	0.29989436(6)	0.184197(1)	0.61421	0.1321(4)	0.016	
15906	0.31385133(7)	0.192516(1)	0.6134	0.1236(5)	0.019	
15978	0.28687856(4)	0.176665(1)	0.61582	0.1419(4)	0.015	
15997	0.29335126(7)	0.179408(1)	0.61158	0.1222(5)	0.02	kand.
16002	0.31423415(8)	0.192680(1)	0.61317	0.1223(5)	0.018	
	0.31423415(8)	0.195342(1)	0.62164	0.1223(5)	0.017	
16013	0.2996399(1)	0.1838392(7)	0.61353	0.1232(7)	0.049	
16018	0.30858443(7)	0.189121(1)	0.61287	0.1279(5)	0.018	kand.
16022	0.31745286(9)	0.194568(1)	0.6129	0.1242(6)	0.023	
16075	0.3148151(2)	0.195779(1)	0.62189	0.1227(9)	0.035	kand.
16077	0.30623737(6)	0.187114(1)	0.61101	0.1294(5)	0.016	
16111	0.30265397(7)	0.185931(1)	0.61434	0.1276(5)	0.023	kand.
16167	0.28842194(7)	0.176884(1)	0.61328	0.1270(5)	0.024	kand.
16205	0.3247993(1)	0.199131(2)	0.61309	0.1252(6)	0.022	
16246	0.30566956(7)	0.188263(1)	0.6159	0.1308(6)	0.02	
16268	0.25268392(4)	0.1549075(9)	0.61305	0.1350(4)	0.019	
16456	0.24949928(6)	0.1528444(7)	0.6126	0.0891(4)	0.027	
16517	0.3177013(1)	0.194801(2)	0.61316	0.1192(6)	0.023	kand.
17069	0.28025306(6)	0.1719536(3)	0.61357	0.1500(7)	0.021	kand.
17338	0.30568208(10)	0.187157(1)	0.61226	0.1333(8)	0.032	kand.
17471	0.28782131(3)	0.1769667(10)	0.61485	0.1365(8)	0.027	
17684	0.30364291(8)	0.1860052(9)	0.61258	0.1292(6)	0.03	
18350	0.29607177(10)	0.181891(1)	0.61435	0.1232(8)	0.031	
19952	0.2632481(2)	0.1603591(9)	0.60916	0.142(2)	0.056	kand.
20257	0.31867080(7)	0.201261(1)	0.63156	0.1177(4)	0.021	

*Kontynuacja na następnej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
20374	0.35273038(4)	0.215591(2)	0.61121	0.1158(7)	0.016	kand.
20431	0.33682566(6)	0.206966(1)	0.61446	0.1253(4)	0.022	
20565	0.30279911(8)	0.185932(1)	0.61404	0.1312(6)	0.025	
20633	0.3034031(2)	0.185961(2)	0.61292	0.127(1)	0.047	kand.
20817	0.30788424(6)	0.191525(1)	0.62207	0.1310(4)	0.02	
20872	0.4358551(1)	0.273852(3)	0.62831	0.1140(4)	0.017	kand.
21952	0.30652549(7)	0.187470(1)	0.6116	0.1373(6)	0.023	
21959	0.2663289(2)	0.164554(1)	0.61786	0.154(2)	0.097	bl
21968	0.30554400(7)	0.187063(1)	0.61223	0.1282(5)	0.025	
22388	0.30560092(6)	0.187653(1)	0.61405	0.1256(4)	0.023	
22492	0.26770796(6)	0.163419(1)	0.61044	0.1044(5)	0.027	
22667	0.3064996(1)	0.188109(1)	0.61373	0.1248(7)	0.043	
22808	0.29760311(5)	0.1819411(9)	0.61135	0.1398(4)	0.024	
22831	0.36357282(10)	0.227835(2)	0.62666	0.1287(5)	0.015	kand.
22914	0.31431319(9)	0.192472(1)	0.61236	0.1468(6)	0.014	kand.
23005	0.30201733(7)	0.185265(1)	0.61343	0.1203(5)	0.027	
23151	0.31035740(7)	0.190286(3)	0.61312	0.1185(4)	0.024	
23182	0.29608550(6)	0.181245(1)	0.61214	0.1313(5)	0.021	
23205	0.30929644(7)	0.189611(1)	0.61304	0.1250(4)	0.024	
23394	0.32143411(7)	0.202520(2)	0.63005	0.1155(4)	0.016	kand.
23432	0.26100392(8)	0.1599070(9)	0.61266	0.1066(7)	0.033	
23437	0.2873553(3)	0.176546(1)	0.61438	0.109(2)	0.092	kand.
23600	0.3154509(2)	0.196091(1)	0.62162	0.1247(9)	0.038	
23732	0.29576237(5)	0.180994(1)	0.61196	0.1410(4)	0.015	kand.
23800	0.3136775(1)	0.192414(1)	0.61341	0.1238(6)	0.03	
24574	0.2936512(2)	0.180016(1)	0.61303	0.127(1)	0.043	
24936	0.3104671(1)	0.190490(2)	0.61356	0.1216(6)	0.023	kand.
24945	0.29662336(9)	0.182480(1)	0.61519	0.1284(6)	0.025	
25450	0.3202394(3)	0.1968101(7)	0.61457	0.125(1)	0.048	
25727	0.295694(1)	0.179973(2)	0.60865	0.125(3)	0.16	kand.
25784	0.29481845(7)	0.1809363(10)	0.61372	0.1365(6)	0.023	
26009	0.29079450(7)	0.178454(1)	0.61368	0.1394(7)	0.024	kand.
26177	0.3188948(3)	0.202164(2)	0.63395	0.135(2)	0.074	kand.
26256	0.2206397(2)	0.138785(1)	0.62901	0.057(1)	0.14	kand.
26263	0.2827581(2)	0.174820(1)	0.61827	0.126(2)	0.087	
26388	0.28715345(9)	0.176726(1)	0.61544	0.1377(7)	0.021	kand.
26738	0.24384962(7)	0.1495729(7)	0.61338	0.1115(7)	0.037	
26891	0.30860918(8)	0.189545(1)	0.61419	0.1257(5)	0.023	
27690	0.23618019(6)	0.1453185(7)	0.61529	0.0875(5)	0.03	
27707	0.2962165(1)	0.181625(1)	0.61315	0.1295(8)	0.032	kand.
28135	0.25386558(5)	0.1557970(10)	0.6137	0.1049(4)	0.018	
28314	0.30371944(5)	0.186405(1)	0.61374	0.1019(7)	0.028	
28419	0.2890046(1)	0.176978(1)	0.61237	0.143(1)	0.035	kand.
29661	0.2932706(6)	0.1798607(10)	0.61329	0.141(1)	0.02	

*Kontynuacja na następnej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
29811	0.29745601(10)	0.182544(2)	0.61368	0.1242(7)	0.023	kand.
30077	0.2916725(2)	0.177400(1)	0.60822	0.116(1)	0.052	kand.
30249	0.2949113(3)	0.182253(1)	0.61799	0.143(2)	0.07	kand.
30497	0.31193686(9)	0.191383(1)	0.61353	0.1314(7)	0.03	
30633	0.29149550(5)	0.1789072(9)	0.61376	0.1315(4)	0.023	
30707	0.3578046(1)	0.224900(2)	0.62856	0.1178(5)	0.026	kand.
30713	0.3160170(3)	0.191906(1)	0.60726	0.113(2)	0.08	
30848	0.30692897(4)	0.188418(1)	0.61388	0.1235(3)	0.014	
30871	0.28671507(9)	0.176257(1)	0.61475	0.1454(9)	0.03	kand.
31059	0.30336272(4)	0.185668(1)	0.61203	0.1405(6)	0.024	kand.
31176	0.3012340(1)	0.1849665(9)	0.61403	0.1115(7)	0.055	
31457	0.25793215(10)	0.1585973(10)	0.61488	0.133(1)	0.045	kand.
31479	0.25607708(7)	0.1566354(7)	0.61167	0.0979(5)	0.031	
31492	0.31929505(9)	0.195734(1)	0.61302	0.1292(6)	0.021	kand.
31508	0.31481230(5)	0.192871(2)	0.61265	0.1262(4)	0.011	kand.
31509	0.30850728(8)	0.189233(1)	0.61338	0.1295(6)	0.022	kand.
31586	0.31039365(6)	0.190296(1)	0.61308	0.1204(4)	0.017	kand.
31600	0.30782878(5)	0.191200(1)	0.62112	0.1328(3)	0.016	0.5 $f_x$
31641	0.31030202(5)	0.1902879(7)	0.61323	0.1288(3)	0.026	
31736	0.30524110(3)	0.187269(3)	0.61351	0.1337(2)	0.012	0.5 $f_x$
	0.30524110(3)	0.1925625(4)	0.63085	0.1337(2)	0.011	
31753	0.27630146(3)	0.1692550(6)	0.61257	0.1133(3)	0.024	
31809	0.33831393(7)	0.213062(1)	0.62978	0.0878(3)	0.019	
31905	0.28806311(4)	0.1768940(9)	0.61408	0.1595(4)	0.016	
31950	0.28700626(3)	0.1756031(10)	0.61184	0.1418(3)	0.013	
31960	0.29491649(6)	0.1807751(6)	0.61297	0.1354(5)	0.033	
31994	0.28845104(6)	0.177339(1)	0.6148	0.1030(4)	0.02	kand.
32002	0.28662713(5)	0.1757953(5)	0.61332	0.1333(4)	0.032	
32054	0.31481782(4)	0.193420(1)	0.61439	0.1265(2)	0.012	
	0.31481782(4)	0.195716(2)	0.62168	0.1265(2)	0.009	
	0.31481782(4)	0.198673(1)	0.63107	0.1265(2)	0.01	
32074	0.24342902(6)	0.1492172(7)	0.61298	0.1029(6)	0.033	
32091	0.28894518(2)	0.17690307(9)	0.61224	0.1294(2)	0.027	
32139	0.31002046(3)	0.1902447(4)	0.61365	0.1275(3)	0.036	0.5 $f_x$
	0.31002046(3)	0.192991(1)	0.62251	0.1275(3)	0.013	
	0.31002046(3)	0.195867(1)	0.63179	0.1275(3)	0.011	
32143	0.32123808(4)	0.202574(1)	0.6306	0.1225(3)	0.014	
32145	0.30004964(3)	0.1842304(2)	0.614	0.1147(2)	0.028	
	0.30004964(3)	0.186719(3)	0.62229	0.1147(2)	0.01	
32151	0.32801366(8)	0.201576(1)	0.61454	0.1276(6)	0.024	
32158	0.30945091(3)	0.189532(1)	0.61248	0.1282(3)	0.012	
32180	0.338096820(10)	0.212233(2)	0.62773	0.1191(2)	0.009	0.5 $f_x$
	0.338096820(10)	0.214222(2)	0.63361	0.1191(2)	0.008	
32199	0.27712149(10)	0.1717888(9)	0.6199	0.1148(8)	0.024	

*Kontynuacja na następnnej stronie*



Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
32213	0.24889440(5)	0.1574083(7)	0.63243	0.0806(3)	0.03	
	0.24889440(5)	0.1524801(6)	0.61263	0.0806(3)	0.03	
	0.24889440(5)	0.1574083(7)	0.63243	0.0806(3)	0.03	
32252	0.36309769(6)	0.228489(1)	0.62928	0.1140(2)	0.013	
32263	0.29433189(5)	0.179923(1)	0.61129	0.1332(5)	0.023	bl
32282	0.31760989(6)	0.200220(1)	0.63040	0.1330(2)	0.013	0.5 $f_x$
32289	0.30627376(2)	0.1885143(5)	0.61551	0.1258(1)	0.015	
32295	0.31434021(6)	0.199234(2)	0.63382	0.1136(3)	0.01	kand.
32304	0.34573419(7)	0.212025(1)	0.61326	0.1317(4)	0.021	
	0.34573419(7)	0.215105(2)	0.62217	0.1317(4)	0.017	
	0.34573419(7)	0.218200(2)	0.63112	0.1317(4)	0.014	
32348	0.33697369(5)	0.205291(2)	0.60922	0.1342(3)	0.009	kand.
32396	0.37030911(6)	0.232470(1)	0.62777	0.1136(3)	0.017	0.5 $f_x$
32573	0.33186925(6)	0.208210(2)	0.62739	0.1288(4)	0.016	kand.
32636	0.29001784(7)	0.178090(1)	0.61407	0.1339(7)	0.028	
32706	0.29223304(9)	0.1791172(10)	0.61293	0.1281(8)	0.037	
32713	0.28631104(6)	0.1761364(9)	0.61519	0.1710(8)	0.027	kand.
32782	0.33324349(6)	0.204224(1)	0.61284	0.1219(4)	0.018	
32796	0.21774439(5)	0.1339305(5)	0.61508	0.0606(3)	0.033	
32816	0.31308618(6)	0.194813(1)	0.62223	0.1193(4)	0.016	
32820	0.29418472(5)	0.1802570(9)	0.61273	0.1314(5)	0.024	
32831	0.31124914(9)	0.190610(1)	0.6124	0.1229(6)	0.015	
32877	0.25065626(6)	0.1534253(6)	0.61209	0.0731(3)	0.036	
	0.25065626(6)	0.155976(1)	0.62227	0.0731(3)	0.022	
33162	0.23658973(4)	0.1448679(6)	0.61232	0.0651(3)	0.038	
	0.23658973(4)	0.1473943(8)	0.623	0.0651(3)	0.018	
33189	0.36514752(9)	0.224241(2)	0.61411	0.1512(5)	0.016	
33228	0.3181641(1)	0.195039(1)	0.61301	0.1208(7)	0.022	kand.
33270	0.3007049(2)	0.184471(1)	0.61346	0.128(1)	0.018	
33378	0.24330738(6)	0.1489998(3)	0.61239	0.0810(2)	0.04	
33545	0.34284320(3)	0.2150169(9)	0.62716	0.1216(2)	0.011	0.5 $f_x$
	0.34284320(3)	0.216420(2)	0.63125	0.1216(2)	0.009	
33775	0.24956761(4)	0.1553826(7)	0.62261	0.0832(3)	0.024	0.5 $f_x$
	0.24956761(4)	0.1579050(6)	0.63271	0.0832(3)	0.018	
33964	0.21544350(7)	0.1331931(4)	0.61823	0.0503(4)	0.095	bl
34003	0.2664148(2)	0.1689182(5)	0.63404	0.0592(9)	0.054	
34171	0.2845978(2)	0.172472(1)	0.60602	0.1139(9)	0.037	kand.
34206	0.31296335(10)	0.191968(1)	0.61339	0.0485(2)	0.023	
34233	0.30667044(8)	0.188302(1)	0.61402	0.1235(5)	0.023	
34332	0.2971743(2)	0.182503(2)	0.61413	0.132(1)	0.02	
34346	0.26654026(7)	0.1630731(9)	0.61181	0.1082(5)	0.026	kand.
	0.26654026(7)	0.1656029(9)	0.62131	0.1082(5)	0.025	
34359	0.29417536(6)	0.180493(1)	0.61356	0.1375(5)	0.022	
34376	0.3096863(1)	0.1895385(10)	0.61203	0.1235(6)	0.035	

*Kontynuacja na następnej stronie*

Tabela A.1 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
34391	0.31664949(6)	0.194074(1)	0.6129	0.1251(3)	0.017	0.5 $f_x$
34401	0.27249053(2)	0.167629(6)	0.61517	0.1505(2)	0.008	kand.
34517	0.31834976(6)	0.197895(1)	0.62163	0.1216(3)	0.012	
	0.31834976(6)	0.195074(2)	0.61277	0.1216(3)	0.012	
34766	0.3102331(3)	0.189451(2)	0.61067	0.123(2)	0.065	kand.
34808	0.31487440(6)	0.1934919(10)	0.61451	0.1248(4)	0.02	
35006	0.29745(3)	0.1827037(9)	0.61423	0.13(2)	0.026	
35129	0.25505101(3)	0.1562090(8)	0.61246	0.1031(5)	0.034	
35202	0.25138603(5)	0.1540225(7)	0.61269	0.0856(3)	0.022	
35261	0.31208884(10)	0.191734(3)	0.61436	0.1333(6)	0.025	
35325	0.30297353(7)	0.186059(1)	0.61411	0.1251(5)	0.018	
35336	0.28635102(5)	0.175925(1)	0.61437	0.1293(4)	0.018	
35369	0.28166515(2)	0.1732000(6)	0.61491	0.1460(3)	0.016	
35396	0.30821088(7)	0.1891652(7)	0.61375	0.1212(5)	0.032	
35412	0.30144849(8)	0.185196(1)	0.61435	0.1322(6)	0.023	
35434	0.23154470(3)	0.1421632(2)	0.61398	0.1141(4)	0.017	
35436	0.23590825(4)	0.1445258(5)	0.61264	0.0801(3)	0.03	
35458	0.31163149(8)	0.1909877(9)	0.61286	0.1136(6)	0.031	
35479	0.310921(2)	0.190720(1)	0.6134	0.119(1)	0.026	kand.
35524	0.28133186(6)	0.173036(1)	0.61506	0.1494(5)	0.019	
35665	0.31548138(7)	0.193523(1)	0.61342	0.1282(5)	0.019	
35788	0.28865510(6)	0.1774204(10)	0.61464	0.1346(5)	0.022	
35820	0.23863501(7)	0.1464143(8)	0.61355	0.1141(7)	0.046	bl
35864	0.28760561(7)	0.176621(1)	0.61411	0.1334(6)	0.02	
36146	0.3076168(1)	0.188724(1)	0.6135	0.1300(8)	0.032	
36165	0.31859264(8)	0.201045(1)	0.63104	0.1391(6)	0.026	
36173	0.29459646(7)	0.181036(1)	0.61452	0.1346(5)	0.023	
36303	0.30359726(8)	0.186170(1)	0.61321	0.1264(5)	0.023	kand.
36522	0.35432453(8)	0.216845(2)	0.612	0.1359(6)	0.015	
36685	0.2891668(2)	0.177459(2)	0.61369	0.1378(8)	0.033	
38634	0.2382020(1)	0.1462079(8)	0.6138	0.0744(8)	0.055	
38729	0.2250438(1)	0.1393534(6)	0.61923	0.0328(4)	0.079	
38777	0.2074844(1)	0.1290387(4)	0.62192	0.0403(7)	0.206	
39022	0.3687967(2)	0.232673(2)	0.6309	0.0858(5)	0.016	kand.

Tabela A.2: Właściwości gwiazd RR<sub>0.68</sub>. Kolejne kolumny zawierają nazwę gwiazdy, okres pierwszego owertonu, okres dodatkowego sygnału, stosunek okresów, amplitudę pierwszego owertonu oraz stosunek amplitud dodatkowego sygnału do amplitudy pierwszego owertonu. Ostatnia kolumna zawiera uwagi: ‘komb’ – wykryta częstość kombinacyjna między częstością pierwszego owertonu i częstością dodatkowego sygnału, ‘bl’ – wykryty efekt Błażki.

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_X/P_{10}$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
01064	0.31486155(4)	0.458607(6)	0.68656	0.1239(3)	0.016	
01152	0.34759513(10)	0.507535(4)	0.68487	0.1084(5)	0.04	komb.
01408	0.3853534(3)	0.56176(1)	0.68598	0.112(1)	0.04	
01436	0.3242810(5)	0.47942(2)	0.6764	0.120(3)	0.04	
01808	0.3161546(2)	0.460225(5)	0.68696	0.0937(8)	0.063	
03053	0.2898407(1)	0.423478(6)	0.68443	0.1273(9)	0.042	bl
03058	0.3862909(2)	0.56395(1)	0.68497	0.1342(9)	0.019	bl
03581	0.3763837(3)	0.549241(5)	0.68528	0.0964(9)	0.059	
04192	0.3350892(1)	0.489131(7)	0.68507	0.1101(5)	0.03	
04264	0.25384340(4)	0.371494(1)	0.6833	0.1166(3)	0.021	bl
04506	0.27507883(3)	0.403839(6)	0.68116	0.1526(3)	0.013	
04714	0.28915072(10)	0.421093(7)	0.68667	0.1189(8)	0.02	
04994	0.3623021(1)	0.527853(6)	0.68637	0.0802(3)	0.039	
05080	0.29969806(8)	0.436809(2)	0.68611	0.1358(3)	0.046	komb.
05428	0.35477206(5)	0.517599(5)	0.68542	0.1290(2)	0.019	bl
05709	0.4102718(2)	0.600101(4)	0.68367	0.0844(4)	0.062	komb.
06402	0.40747615(7)	0.593479(9)	0.68659	0.1086(2)	0.015	
06446	0.35821090(7)	0.515816(3)	0.69445	0.1111(3)	0.034	
06754	0.3530891(2)	0.513926(7)	0.68704	0.1113(7)	0.022	
06791	0.31127928(5)	0.459519(4)	0.6774	0.0790(2)	0.028	
06913	0.30005824(3)	0.437305(4)	0.68615	0.1243(7)	0.027	komb.
06963	0.3701000(3)	0.540224(5)	0.68509	0.120(1)	0.028	
06970	0.42988951(2)	0.626501(4)	0.68618	0.12694(8)	0.012	
07054	0.3522689(1)	0.524518(6)	0.6716	0.1078(5)	0.019	
07127	0.377884(3)	0.550563(7)	0.68636	0.103(5)	0.032	
07428	0.3268696(1)	0.477291(7)	0.68484	0.1123(5)	0.026	
07653	0.31117973(5)	0.454155(2)	0.68518	0.1133(3)	0.025	bl
07673	0.36628701(5)	0.534252(1)	0.68561	0.1165(2)	0.06	
07795	0.28498705(10)	0.416035(5)	0.68501	0.1118(7)	0.018	
08006	0.3005622(2)	0.438004(5)	0.68621	0.148(2)	0.049	komb.
08076	0.28448241(4)	0.4153347(7)	0.68495	0.1353(3)	0.1	komb.
08243	0.32507556(10)	0.473290(7)	0.68684	0.1098(5)	0.018	
08466	0.3015875(2)	0.439480(6)	0.68624	0.072(2)	0.057	
08680	0.34769682(6)	0.505277(3)	0.68813	0.1366(4)	0.015	
08748	0.29154582(4)	0.424904(1)	0.68615	0.1172(3)	0.039	
08808	0.34781176(10)	0.507064(6)	0.68593	0.1324(6)	0.031	
08832	0.30360473(4)	0.441876(3)	0.68708	0.1117(3)	0.03	bl
08879	0.32433994(5)	0.468103(3)	0.69288	0.1158(2)	0.015	komb.

*Kontynuacja na następnej stronie*

Tabela A.2 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
08884	0.30405745(6)	0.442167(3)	0.68765	0.1306(4)	0.035	
09146	0.35215975(2)	0.512426(1)	0.68724	0.1479(1)	0.028	komb.
09152	0.29421007(6)	0.428739(3)	0.68622	0.1413(6)	0.028	komb.
09217	0.29391373(2)	0.428721(2)	0.68556	0.1077(1)	0.024	
09315	0.35667080(6)	0.520653(9)	0.68505	0.1093(2)	0.012	
09323	0.32622775(6)	0.475398(5)	0.68622	0.1171(4)	0.027	
09426	0.22339317(2)	0.325072(2)	0.68721	0.0715(1)	0.017	
09471	0.27545071(4)	0.408273(4)	0.67467	0.1207(3)	0.039	komb.
09516	0.40034558(7)	0.583925(6)	0.68561	0.1208(3)	0.017	
09671	0.28267064(2)	0.4141634(9)	0.68251	0.1536(2)	0.02	komb.
09684	0.30376835(8)	0.443086(7)	0.68557	0.0900(4)	0.02	
09752	0.33273947(7)	0.485611(2)	0.6852	0.1345(2)	0.026	
09788	0.2821596(1)	0.410939(4)	0.68662	0.137(1)	0.019	
09921	0.3249314(1)	0.476746(7)	0.68156	0.1248(8)	0.038	
09998	0.3603170(4)	0.525014(2)	0.6863	0.0748(9)	0.025	
10100	0.4174338(3)	0.609478(1)	0.6849	0.0732(6)	0.094	
10153	0.34635591(3)	0.505007(3)	0.68584	0.1439(2)	0.015	
10318	0.36481785(5)	0.533031(5)	0.68442	0.0956(2)	0.021	
10390	0.28294441(10)	0.411908(3)	0.68691	0.1215(7)	0.019	
10401	0.27062947(3)	0.394159(4)	0.6866	0.1278(3)	0.016	komb.
10427	0.34424092(4)	0.507088(7)	0.67886	0.1064(2)	0.011	komb.
10474	0.28901302(3)	0.417259(6)	0.69265	0.1378(3)	0.011	
10537	0.3665323(3)	0.535687(5)	0.68423	0.0986(9)	0.047	
10766	0.31436187(3)	0.456659(5)	0.6884	0.1093(1)	0.009	
10836	0.28888881(2)	0.422426(2)	0.68388	0.1061(1)	0.027	bl
10924	0.39507662(4)	0.575102(5)	0.68697	0.1278(1)	0.011	
11091	0.3641257(1)	0.531420(5)	0.68519	0.1306(6)	0.019	
11099	0.2932960(1)	0.422374(4)	0.6944	0.132(1)	0.023	
11167	0.26610202(3)	0.389773(2)	0.68271	0.0859(1)	0.026	bl
11332	0.27560220(6)	0.401585(4)	0.68629	0.1260(5)	0.025	
11457	0.31576255(2)	0.460148(5)	0.68622	0.1402(1)	0.006	
11508	0.29317212(2)	0.4289023(10)	0.68354	0.1086(1)	0.025	bl
11573	0.3531318(1)	0.516871(7)	0.68321	0.1203(5)	0.017	
11615	0.36799364(4)	0.534057(5)	0.68905	0.1596(2)	0.013	
11651	0.28954120(5)	0.422708(6)	0.68497	0.1430(5)	0.016	
11719	0.2944020(1)	0.430238(5)	0.68428	0.1327(9)	0.017	
11753	0.25910064(2)	0.375306(1)	0.69037	0.0907(1)	0.03	bl
11780	0.30307160(5)	0.444715(2)	0.6815	0.0581(2)	0.045	
11856	0.29625757(4)	0.431400(2)	0.68674	0.1365(3)	0.025	
11875	0.3468205(1)	0.506607(3)	0.68459	0.0714(3)	0.064	
11977	0.3591727(3)	0.524350(4)	0.68499	0.0919(8)	0.025	
12014	0.3549333(2)	0.520279(6)	0.6822	0.1290(9)	0.02	
12086	0.27799888(7)	0.411307(5)	0.67589	0.1343(6)	0.028	

*Kontynuacja na następnej stronie*

Tabela A.2 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
12096	0.36764697(6)	0.535590(7)	0.68643	0.1088(4)	0.027	
12218	0.3508042(1)	0.510965(2)	0.68655	0.1397(9)	0.009	
12297	0.3218767(1)	0.470563(6)	0.68402	0.1007(6)	0.021	
12448	0.31994492(8)	0.466865(5)	0.68531	0.0502(2)	0.024	
12659	0.2644574(1)	0.386308(2)	0.68458	0.0780(8)	0.067	bl
13148	0.31094608(3)	0.454121(2)	0.68472	0.1215(1)	0.029	bl
13364	0.32131868(9)	0.468434(5)	0.68594	0.1161(4)	0.028	
13470	0.3636541(1)	0.5273196(2)	0.68963	0.1051(6)	0.239	bl
13473	0.2841456(2)	0.414489(1)	0.68553	0.0885(10)	0.054	komb.
13649	0.28090957(3)	0.413852(3)	0.67877	0.1382(4)	0.024	
13946	0.3659967(3)	0.533990(7)	0.6854	0.0667(6)	0.066	
14175	0.34508350(6)	0.508744(6)	0.6783	0.1303(3)	0.032	
14249	0.3271560(2)	0.477165(5)	0.68562	0.0838(8)	0.041	
14509	0.3223140(1)	0.467379(7)	0.68962	0.1207(6)	0.03	
14576	0.35193153(9)	0.513251(7)	0.68569	0.1373(5)	0.02	
14603	0.35182806(9)	0.513162(3)	0.68561	0.1276(5)	0.024	
14643	0.31803437(6)	0.464795(6)	0.68425	0.1082(3)	0.028	bl
14712	0.3159050(1)	0.457925(3)	0.68986	0.1149(8)	0.028	
14775	0.33467567(6)	0.486812(4)	0.68748	0.1374(4)	0.02	komb.
14793	0.29167885(3)	0.42505(2)	0.68622	0.1388(6)	0.015	
15292	0.31023726(7)	0.452367(5)	0.68581	0.1097(4)	0.025	
15306	0.29835917(5)	0.434121(4)	0.68727	0.1089(3)	0.025	komb.
15316	0.30598042(5)	0.445961(5)	0.68611	0.1246(4)	0.025	bl
15453	0.3120852(1)	0.451768(5)	0.69081	0.0793(5)	0.043	
18477	0.2735329(1)	0.399581(6)	0.68455	0.1103(9)	0.039	
20374	0.35273038(4)	0.513955(4)	0.68631	0.1158(7)	0.035	
20527	0.3893246(2)	0.567486(6)	0.68605	0.1019(6)	0.046	bl
21483	0.4232227(2)	0.61761(1)	0.68526	0.1112(7)	0.014	
23400	0.29065598(4)	0.427389(4)	0.68007	0.1287(3)	0.025	
23539	0.2641039(3)	0.388081(6)	0.68054	0.123(2)	0.089	
23583	0.3729788(4)	0.544064(9)	0.68554	0.092(1)	0.087	bl
24161	0.35717771(10)	0.520925(9)	0.68566	0.1333(6)	0.02	
24204	0.27472585(6)	0.397967(4)	0.69032	0.1406(6)	0.031	
25192	0.27129879(9)	0.398920(3)	0.68008	0.0978(6)	0.052	
25498	0.26460343(8)	0.385529(4)	0.68634	0.1326(9)	0.038	
26809	0.26095299(8)	0.380805(3)	0.68527	0.0971(6)	0.045	
27023	0.3172598(2)	0.465487(9)	0.68157	0.142(1)	0.038	
28293	0.3684074(3)	0.537252(3)	0.68573	0.124(2)	0.029	
28763	0.3518545(3)	0.512690(4)	0.68629	0.106(1)	0.024	
29582	0.3053653(4)	0.44747(1)	0.68243	0.109(1)	0.083	
30601	0.28369900(7)	0.412857(2)	0.68716	0.1155(5)	0.076	komb.
30913	0.3601654(3)	0.526911(7)	0.68354	0.0850(9)	0.052	
31374	0.31427292(4)	0.465617(2)	0.67496	0.1104(2)	0.041	

*Kontynuacja na następnej stronie*

Tabela A.2 – *Kontynuacja z poprzedniej strony*

OGLE- BLG- RRLYR-	$P_{10}$ [d]	$P_X$ [d]	$P_{10}/P_X$	$A_{10}$ [mag]	$A_X/A_{10}$	Uwagi
31675	0.28193075(4)	0.411128(4)	0.68575	0.1499(5)	0.021	
31689	0.37833658(5)	0.55111(1)	0.6865	0.1416(4)	0.016	
31756	0.29651674(3)	0.431651(2)	0.68694	0.1389(3)	0.028	komb.
32193	0.3072905(1)	0.454946(6)	0.67544	0.0764(4)	0.033	
32196	0.26774759(5)	0.390688(3)	0.68532	0.1000(3)	0.033	bl
32230	0.35933125(7)	0.526130(8)	0.68297	0.1300(4)	0.017	
32334	0.3930328(3)	0.573630(4)	0.68517	0.0737(7)	0.05	
32789	0.34975545(8)	0.510378(4)	0.68529	0.0920(3)	0.039	bl
33635	0.28068403(4)	0.409564(2)	0.68532	0.0462(1)	0.044	
33638	0.35814586(5)	0.52441(2)	0.68295	0.0624(1)	0.021	bl
33695	0.3602471(2)	0.525550(6)	0.68547	0.0800(6)	0.046	bl
33903	0.2822250(2)	0.414125(10)	0.6815	0.0800(4)	0.031	
33993	0.3710790(1)	0.540394(8)	0.68668	0.1273(6)	0.02	
34106	0.31537940(10)	0.455995(8)	0.69163	0.1273(6)	0.021	
34273	0.28007257(2)	0.408058(6)	0.68635	0.1208(6)	0.021	
34336	0.4250681(6)	0.619784(4)	0.68583	0.080(1)	0.028	
34540	0.27718010(4)	0.406985(2)	0.68106	0.1393(4)	0.035	bl
35159	0.30767254(7)	0.448514(5)	0.68598	0.1019(4)	0.021	
35328	0.30681327(7)	0.445975(4)	0.68796	0.1257(4)	0.022	bl
35896	0.3231642(1)	0.473267(2)	0.68284	0.1273(7)	0.031	
36049	0.3574694(3)	0.521800(9)	0.68507	0.0886(9)	0.053	bl
36404	0.28782534(10)	0.420318(6)	0.68478	0.1399(9)	0.035	
36675	0.3271381(1)	0.479327(8)	0.68249	0.1324(5)	0.042	

DODATEK B

# Parametry gwiazd HADS



Tabela B.1: Parametry fizyczne wynikające z dopasowania modeli do obserwowanych gwiazd  $\delta$  Scuti pulsujących w co najmniej trzech modach radialnych jednocześnie. Kolejne kolumny zawierają nazwę gwiazdy, mody pulsacji, masę, metaliczność, parametr przestrzeliwania z konwektywnego jądra, temperaturę efektywną, jasność, wiek oraz status ewolucyjny. ‘PostMS’ oznacza ewolucję po ciągu głównym, natomiast ‘MS’ ewolucję na ciągu głównym.

OGLE- BLG- DSCT-	typ	$M$ [ $M_{\odot}$ ]	[Fe/H]	$f_H$	$\log T_{\text{eff}}$	$\log L/L_{\odot}$	Wiek [Gyr]	Uwagi
00018	F+1O+2O	1.20	-0.875	0	3.87114	1.00810	3.24	PostMS
00075	F+1O+2O	1.10	-1.250	0	3.83934	1.03260	4.14	PostMS
00136	F+1O+3O	1.00	-1.375	0	3.83057	0.90920	5.68	PostMS
00143	F+1O+3O	0.90	-1.625	0	3.83432	0.76600	7.95	PostMS
00358	F+1O+3O	0.95	-1.125	0	3.84061	0.64960	6.69	PostMS
00394	F+1O+2O	1.55	-0.750	0	3.86327	1.39330	1.55	PostMS
00648	F+1O+2O	1.65	0.000	0	3.85738	0.91450	1.26	MS
00871	F+1O+3O	1.10	-1.125	0	3.87566	0.93020	4.08	PostMS
00899	F+1O+3O	1.55	-0.375	0	3.86719	1.22940	1.87	PostMS
00922	F+1O+3O	1.35	-0.875	0	3.87385	1.20870	2.22	PostMS
00953	F+1O+3O	1.35	-0.250	0	3.84276	0.83650	2.66	MS
01050	F+1O+3O	1.05	-0.875	0	3.84880	0.70950	4.82	PostMS
01119	F+1O+2O	1.55	-0.500	0	3.85767	1.29740	1.74	PostMS
01198	1O+2O+3O	2.15	0.125	0	3.81460	1.44200	1.08	PostMS
01573	F+1O+3O	1.70	0.000	0.02	3.89334	0.89820	0.35	MS
01697	F+1O+3O	2.00	0.125	0.01	3.86066	1.21260	1.12	MS
01870	F+1O+2O	1.50	-0.500	0	3.84994	1.27240	2.08	PostMS
02004	F+1O+3O	1.60	-0.500	0.02	3.88742	1.24190	1.57	MS
02060	F+1O+3O	0.85	-2.000	0	3.84014	0.70380	9.51	PostMS
02064	F+1O+2O	1.05	-1.125	0	3.86680	0.81690	4.69	PostMS
02575	F+1O+3O	2.00	0.000	0.03	3.87587	1.36020	1.19	MS
02578	1O+2O+3O	2.40	0.375	0	3.81247	1.45230	1.13	PostMS
02684	F+1O+2O	1.10	-1.250	0	3.89717	0.92300	3.92	PostMS
02713	F+1O+3O	1.40	-0.375	0.02	3.84292	0.89900	2.25	MS
02798	F+1O+3O	1.00	-1.000	0	3.83798	0.72360	5.81	PostMS
02817	F+1O+3O	1.25	-0.500	0	3.84849	0.87390	3.15	PostMS
03035	F+1O+3O	1.50	-0.125	0.01	3.85727	0.82210	1.45	MS
03274	F+1O+3O	2.00	0.250	0	3.85534	1.08790	1.02	MS
03373	F+1O+2O	1.50	-0.375	0.01	3.87890	0.98420	1.58	MS
03561	F+1O+3O	1.00	-1.000	0	3.83963	0.72330	5.77	PostMS
03581	1O+2O+3O	1.80	0.000	0	3.82320	1.26680	1.80	PostMS
03598	F+1O+3O	1.00	-1.250	0	3.83983	0.85140	5.72	PostMS
03780	F+1O+2O	1.50	-0.250	0	3.84633	1.08540	2.12	PostMS
03815	F+1O+3O	0.90	-1.375	0	3.84228	0.62230	7.81	PostMS
03820	F+1O+3O	1.65	0.125	0	3.84575	0.81010	1.05	MS
03843	F+1O+2O	1.10	-0.750	0	3.84801	0.74320	4.27	PostMS
03849	F+1O+3O	1.10	-1.250	0	3.88710	0.95970	4.01	PostMS
03887	F+1O+2O	1.65	0.000	0.03	3.84860	0.96680	1.66	MS
03891	F+1O+2O	1.35	-1.000	0	3.88598	1.26410	2.25	PostMS
03949	F+1O+3O	1.30	-0.875	0	3.82122	1.17240	2.62	PostMS

OGLE- BLG- DSC- typ	$M [M_{\odot}]$	[Fe/H]	$f_{\text{H}}$	$\log T_{\text{eff}}$	$\log L/L_{\odot}$	Wiek [Gyr]	Uwagi	
03986	F+1O+2O	1.95	0.250	0	3.83309	1.05020	1.27	MS
04045	F+1O+3O	1.15	-0.875	0.03	3.86245	0.76680	3.43	MS
04071	F+1O+2O	1.00	-1.750	0	3.84559	0.98150	5.53	PostMS
04116	F+1O+3O	1.50	-0.375	0.03	3.83495	1.06450	2.10	MS
04232	1O+2O+3O	2.10	0.250	0.02	3.81930	1.36940	1.63	MS
04237	F+1O+2O	1.25	-0.500	0	3.83861	0.90940	3.29	PostMS
04278	F+1O+3O	1.00	-1.250	0	3.82937	0.87260	5.76	PostMS
04300	F+1O+2O	1.15	-0.750	0	3.83532	0.91220	3.97	PostMS
04311	F+1O+3O	0.85	-1.750	0	3.84079	0.62970	9.35	PostMS
04348	F+1O+3O	0.90	-1.750	0	3.83165	0.80650	7.87	PostMS
04440	F+1O+3O	1.45	-0.125	0.02	3.84330	0.78400	1.86	MS
04458	F+1O+2O	1.85	0.125	0	3.83777	1.05390	1.33	MS
04542	F+1O+2O	1.10	-0.875	0	3.83646	0.88830	4.43	PostMS
04545	F+1O+3O	1.70	0.125	0.03	3.86582	0.81950	0.38	MS
04603	1O+2O+3O	2.00	0.000	0	3.82877	1.46150	1.35	PostMS
04604	F+1O+2O	1.70	0.000	0.02	3.83919	1.02200	1.65	MS
04643	F+1O+2O	1.60	-0.500	0.02	3.88609	1.20830	1.50	MS
04720	F+1O+3O	0.90	-1.750	0	3.83308	0.80330	7.84	PostMS
04750	F+1O+3O	1.40	-0.250	0	3.85407	0.93210	2.49	MS
04781	F+1O+3O	1.40	-0.625	0.03	3.85820	1.06150	2.24	MS
04783	1O+2O+3O	2.20	0.125	0	3.83110	1.56750	1.33	PostMS
04796	F+1O+3O	0.90	-1.375	0	3.84398	0.60320	7.73	PostMS
04850	F+1O+3O	1.30	-0.500	0.02	3.84522	0.82830	2.60	MS
04936	F+1O+2O	1.20	-1.250	0	3.84730	1.15010	3.10	PostMS
04970	F+1O+2O	2.05	0.125	0.01	3.88094	1.24940	0.96	MS
05003	1O+2O+3O	2.10	0.125	0	3.81587	1.45890	1.37	PostMS
05049	F+1O+3O	1.80	0.125	0.01	3.88435	0.94070	0.49	MS
05068	1O+2O+3O	2.40	0.125	0	3.83768	1.70600	1.04	PostMS
05207	F+1O+3O	1.40	-0.625	0.02	3.88991	1.06010	2.10	MS
05245	F+1O+3O	1.70	0.000	0.01	3.84856	0.99500	1.45	MS
05260	F+1O+3O	1.15	-0.750	0	3.86496	0.79210	3.55	PostMS
05371	F+1O+2O	1.40	-0.500	0.03	3.87068	0.97340	2.13	MS
05401	F+1O+3O	1.80	0.000	0.01	3.84061	1.11120	1.42	MS
05413	F+1O+3O	1.50	-0.375	0	3.87894	1.13240	1.88	PostMS
05428	F+1O+3O	1.75	0.000	0.01	3.85715	1.04730	1.33	MS
05468	F+1O+3O	1.45	-0.500	0.03	3.83783	1.08250	2.23	MS
05477	F+1O+2O	1.55	-0.125	0.03	3.85107	0.93950	1.83	MS
05480	F+1O+3O	1.50	-0.250	0.01	3.84462	0.97350	2.02	MS
05501	F+1O+2O	1.50	-0.250	0.01	3.83813	0.94930	1.97	MS
05548	1O+2O+3O	1.15	-1.375	0	3.82448	1.14820	3.52	PostMS
05572	F+1O+2O	0.95	-1.500	0	3.82961	0.85390	6.62	PostMS
05692	F+1O+3O	1.80	0.000	0	3.84391	1.24650	1.63	PostMS
05720	F+1O+2O	1.25	-0.750	0	3.82468	1.07450	3.04	PostMS
05730	F+1O+2O	1.60	-0.250	0.02	3.87623	1.05890	1.51	MS
05804	F+1O+2O	0.85	-1.750	0	3.83815	0.64630	9.51	PostMS

OGLE- BLG- DSCT-	typ	$M [M_{\odot}]$	[Fe/H]	$f_{\text{H}}$	$\log T_{\text{eff}}$	$\log L/L_{\odot}$	Wiek [Gyr]	Uwagi
05813	F+1O+3O	1.60	-0.375	0.02	3.86081	1.15130	1.63	MS
05836	F+1O+2O	1.95	-0.375	0	3.81067	1.53100	0.89	PostMS
05855	F+1O+2O	1.55	-0.250	0	3.84409	1.17660	2.31	PostMS
06039	F+1O+3O	1.25	-0.375	0	3.84123	0.72060	2.93	MS
06079	F+1O+3O	1.80	0.250	0.01	3.84810	0.87450	0.88	MS
06089	F+1O+2O	1.35	-0.625	0	3.86047	1.13920	2.60	PostMS
06099	F+1O+3O	1.15	-0.875	0	3.86909	0.90790	3.66	PostMS
06122	F+1O+2O	0.85	-1.625	0	3.83882	0.58880	9.43	PostMS
06211	F+1O+2O	1.50	-0.125	0	3.84788	0.96900	2.20	MS
06293	F+1O+3O	1.35	-0.500	0	3.83955	1.06670	2.60	PostMS
06309	F+1O+3O	1.65	0.250	0.03	3.82806	0.70480	0.98	MS
06348	F+1O+2O	1.55	0.000	0.02	3.85597	0.74750	0.72	MS
06349	F+1O+2O	1.20	-1.375	0	3.89033	1.17490	3.02	PostMS
06369	1O+2O+3O	1.95	0.000	0	3.86996	1.28050	1.16	MS
06375	F+1O+3O	1.40	-0.125	0.03	3.84091	0.70920	1.87	MS
06429	F+1O+3O	2.05	0.000	0.01	3.87043	1.35100	1.02	MS
06522	F+1O+3O	0.85	-1.750	0	3.83540	0.66360	9.46	PostMS
06675	1O+2O+3O	1.90	0.000	0	3.82113	1.36900	1.55	PostMS
06712	F+1O+3O	0.85	-1.750	0	3.84062	0.63100	9.36	PostMS
06758	F+1O+2O	1.65	-0.125	0.02	3.88650	1.00500	1.18	MS
06774	F+1O+2O	1.50	-0.250	0.03	3.89304	0.85110	0.93	MS
06808	F+1O+2O	1.20	-1.000	0	3.82482	1.10520	3.24	PostMS
06840	F+1O+2O	1.45	-0.375	0.03	3.84076	1.09380	2.50	MS
06948	F+1O+3O	1.45	-0.500	0.03	3.86315	1.05620	2.07	MS
06958	F+1O+3O	1.65	0.000	0.03	3.87917	0.87610	0.72	MS
07039	F+1O+3O	0.90	-1.375	0	3.84192	0.62720	7.75	PostMS
07094	F+1O+3O	1.05	-1.000	0	3.84286	0.83730	4.97	PostMS
07102	F+1O+2O	1.50	-0.125	0	3.84029	0.84560	1.82	MS
07241	F+1O+2O	1.45	-0.500	0.02	3.86311	1.02960	1.96	MS
07289	F+1O+2O	1.10	-1.500	0	3.89168	1.03210	3.99	PostMS
07348	F+1O+2O	1.90	0.250	0	3.83062	1.00270	1.33	MS
07362	1O+2O+3O	1.20	-1.875	0	3.85026	1.30090	2.98	PostMS
07380	F+1O+2O+3O	1.55	-0.250	0.01	3.85603	0.99140	1.67	MS
07383	F+1O+3O	1.80	0.125	0	3.88831	0.91810	0.25	MS
07388	F+1O+2O	1.70	-0.125	0.02	3.84594	1.20920	1.82	MS
07427	F+1O+2O	1.25	-1.375	0	3.81312	1.27250	2.68	PostMS
07589	F+1O+2O	1.60	0.000	0	3.83857	0.87400	1.60	MS
07618	F+1O+2O	1.80	-0.250	0	3.83052	1.45950	1.54	PostMS
07656	F+1O+2O	1.00	-1.125	0	3.83774	0.80060	5.79	PostMS
07669	F+1O+3O	1.05	-1.250	0	3.83358	0.95860	4.84	PostMS
07692	F+1O+2O	1.70	0.000	0.02	3.83514	1.02510	1.69	MS
07697	F+1O+2O	0.85	-2.000	0	3.84420	0.68300	9.45	PostMS
07723	F+1O+3O	1.40	-0.125	0	3.84519	0.62310	0.80	MS
07775	F+1O+3O	1.50	-0.375	0	3.88217	1.13320	1.88	PostMS
07833	F+1O+2O	1.00	-1.875	0	3.82966	1.02460	5.49	PostMS

OGLE- BLG- DSCT-	typ	$M [M_{\odot}]$	[Fe/H]	$f_{\text{H}}$	$\log T_{\text{eff}}$	$\log L/L_{\odot}$	Wiek [Gyr]	Uwagi
07844	F+1O+2O	1.00	-1.000	0	3.84169	0.71050	5.72	PostMS
07918	1O+2O+3O	2.40	0.375	0	3.82518	1.45860	1.12	PostMS
08009	1O+2O+3O	1.45	-0.500	0	3.84617	1.18260	2.06	PostMS
08050	F+1O+2O	1.40	-0.625	0	3.81212	1.20850	2.36	PostMS
08124	F+1O+2O+3O	1.70	0.000	0.01	3.88866	0.92140	0.60	MS
08132	F+1O+3O	1.65	0.125	0.03	3.85420	0.75260	0.30	MS
08165	F+1O+2O	1.65	0.000	0.02	3.83857	0.96200	1.71	MS
08200	1O+2O+3O	2.15	0.125	0	3.81945	1.50240	1.29	PostMS
08216	F+1O+3O	1.45	-0.125	0.02	3.84585	0.77730	1.77	MS
08235	F+1O+3O	1.05	-0.875	0	3.84192	0.74950	4.97	PostMS
08238	F+1O+3O	1.55	-0.125	0	3.87009	0.86890	1.21	MS
08253	F+1O+2O	1.55	-0.250	0.02	3.88941	0.96050	1.30	MS
08266	F+1O+2O	1.10	-1.125	0	3.84167	0.98910	4.21	PostMS
08319	F+1O+2O	1.30	-0.500	0.03	3.84044	0.85400	2.79	MS
08329	F+1O+3O	1.45	-0.500	0	3.86871	1.18970	2.29	PostMS
08335	F+1O+3O	1.05	-1.375	0	3.82983	0.99780	4.79	PostMS
08372	1O+2O+3O	1.45	-0.500	0.03	3.83810	1.08170	2.23	MS
08377	F+1O+2O	1.75	0.000	0	3.82998	1.20150	1.77	PostMS
08480	F+1O+2O	0.95	-1.125	0	3.84401	0.61240	6.45	MS
08534	F+1O+2O	1.05	-0.750	0	3.84072	0.59920	4.64	MS
08598	F+1O+2O	1.00	-1.500	0	3.82595	0.95210	5.57	PostMS
08632	F+1O+2O	1.00	-1.125	0	3.84376	0.78010	5.73	PostMS
08647	F+1O+3O	1.90	0.125	0	3.88470	1.06900	0.79	MS
08748	F+1O+3O	1.05	-0.875	0	3.83705	0.78100	5.10	PostMS
08878	1O+2O+3O	1.90	0.125	0.03	3.84148	1.16920	1.51	MS
08879	F+1O+3O	1.35	-0.500	0	3.86581	1.02490	2.49	PostMS
08936	F+1O+2O	1.45	-0.250	0.02	3.85237	0.87450	1.93	MS
08958	F+1O+3O	1.35	-0.375	0	3.84959	0.94610	2.64	PostMS
08984	F+1O+2O	0.90	-1.500	0	3.84787	0.65420	7.67	PostMS
09055	F+1O+2O	1.70	0.250	0.01	3.83744	0.73580	0.53	MS
09058	F+1O+3O	1.55	-0.125	0.01	3.83338	0.92220	1.88	MS
09071	F+1O+2O	1.75	0.125	0	3.85856	0.92490	1.02	MS
09109	1O+2O+3O	2.10	0.250	0	3.82100	1.35050	1.64	PostMS
09153	F+1O+3O	1.15	-0.875	0	3.83389	0.97600	3.84	PostMS
09199	F+1O+3O	1.40	-0.375	0	3.86729	0.98900	2.26	PostMS
09260	F+1O+3O	1.90	0.125	0	3.84654	1.10090	1.22	MS
09472	F+1O+3O	1.25	-0.625	0.03	3.84153	0.84650	3.04	MS
09524	F+1O+3O	0.85	-1.625	0	3.84256	0.53310	9.19	MS
09581	F+1O+3O	0.90	-1.375	0	3.84281	0.61800	7.73	PostMS
09666	F+1O+2O	1.45	-1.750	0	3.81210	1.52330	1.65	PostMS
09728	1O+2O+3O	1.25	-1.250	0	3.84111	1.21370	2.72	PostMS
09840	F+1O+2O	1.60	-0.375	0.03	3.84940	1.25480	1.90	MS
09913	F+1O+3O	1.25	-0.375	0.03	3.84197	0.65860	2.58	MS
10050	F+1O+3O	1.05	-1.375	0	3.89756	0.82280	4.38	PostMS
10100	F+1O+2O	1.90	0.125	0	3.86283	1.21250	1.47	MS

## DODATEK C

# Plik parametrów wejściowych kodu MESA

```
&binary_controls

/ ! end of binary_controls namelist

&star_job

    initial_zfracs = 6
    pgstar_flag = .false.
    create_pre_main_sequence_model = .false.
    load_saved_model = .false.
    relax_z=.true.
    new_z=0.0004
    relax_y=.true.
    new_y=0.2701

    pause_before_terminate = .false.

    change_initial_net = .true. ! switch nuclear reaction network
    new_net_name = 'pp_and_cno_extras.net'

    set_rate_c12ag = 'Kunz'
    set_rate_n14pg = 'jina reaclib'

    kappa_file_prefix = 'a09'
    kappa_lowT_prefix= 'lowT_fa05_a09p'
    kappa_CO_prefix = 'a09_co'

/ ! end of star_job namelist

&controls

    x_logical_ctrl(1) = .true.

    use_gold_tolerances = .true.
    use_dedt_form_of_energy_eqn = .true.
```

```
initial_mass = 2.0
MLT_option = 'Cox'
mixing_length_alpha = 1.76

varcontrol_target = 1d-5
mesh_delta_coeff = 0.5
delta_HR_limit = 0.002

use_Type2_opacities = .false.
Zbase = -1

! type of opacity interpolation in X/Z
cubic_interpolation_in_X = .true.
cubic_interpolation_in_Z = .true.

which_atm_option = 'photosphere_tables'

Teff_lower_limit = 5500

alpha_semiconvection = 0.1

! Mixing

num_cells_for_smooth_gradL_composition_term = 20
threshold_for_smooth_gradL_composition_term = 0.02

num_cells_for_smooth_brunt_B = 50
threshold_for_smooth_brunt_B = 1E-4

use_ledoux_criterion = .true.

do_conv_premix = .true.

recalc_mix_info_after_evolve = .true.

smooth_convective_bdy = .false.

! Overshoot
overshoot_f_below_nonburn_shell = 0.015
overshoot_f_above_burn_h_core = 0.0

overshoot_f0_below_nonburn_shell = 0.005
overshoot_f0_above_burn_h_core = 0.0

photo_interval = 1000
```

```
profile_interval = 1  
history_interval = 1  
terminal_interval = 50  
write_header_frequency = 50
```

```
/ ! end of controls namelist
```

```
&pgstar
```

```
/ ! end of pgstar namelist
```